論　文

距離和とドップラー和を観測値とするマルチスタティックレーダによる位置及び速度推定

小菅　義夫[†,††]　古賀　禎[†]　宮崎　裕己[†]　呂　暁東[†]
秋田　学[††]　稲葉　敬之[††]

Location and Velocity Estimation Using Range Sum and Doppler Sum Measurements for Multi-static Radar

Yoshio KOSUGE[†,††], Tadashi KOGA[†], Hiromi MIYAZAKI[†], Xiaodong LU[†], Manabu AKITA[††], and Takayuki INABA[††]

あらまし　送信局と複数の受信局からなるマルチスタティックレーダでは，送信局と目標間の距離と，受信局と目標間の距離の和が観測できる．距離和のみを観測し，目標の位置が推定可能となる必要十分条件は明らかになっている．角度を観測しないこの方式は，モノスタティックレーダと比べハードウェアを小型にできる．更に，距離和と同時に，送信局と目標間のドップラー（距離の変化率）と，受信局と目標間のドップラーの和を観測する方式が報告されている．本論文では，テイラー級数推定法において，距離和のみを観測し目標位置が推定可能となる条件と，距離和とドップラー和を複数同時に観測し位置及び速度が推定可能となる条件は同一であることを示す．したがって，ドップラー和を使用しても，推定可能条件に悪影響はない．また，ドップラー和を使用すれば，観測精度や送受信局の配置によらず，距離和のみ観測の場合の位置推定精度以上となることを示す．これらの結果，ドップラー和の使用が有効なことが分かる．ただし，ドップラー和を使用して位置推定精度を改善するには，最低 4 個の受信局が必要である．更に，位置及び速度推定誤差の分散の上界の算出式を示す．
キーワード　マルチスタティックレーダ，マルチスタティックソナー，誤差解析，距離和，ドップラー和

1. まえがき

送信機や受信機を搭載していない目標の位置を計測するには，目標からの情報を必要としないレーダなどの自律センサが有効である．送信局と受信局が同じ位置にあるモノスタティックレーダでは，目標の距離と角度を観測し，目標の三次元の位置を計測する [1]～[3]．一方，送信局と異なる位置にある受信局を使用する方式はマルチスタティックレーダ，特に受信局が一つの場合はバイタティックレーダと呼ばれる [1]～[3]．

この場合，送信局と目標間の距離と，受信局と目標間の距離の和が観測できる．この距離和を使用すれば，三次元の目標位置を未知数とした連立方程式が作成できる．この連立方程式を解いて，距離和のみより三次元の位置が推定できる．この方式は，TSOA (Time Sum of Arrival) 測位と呼ばれる [4], [5]．

なお，距離は，未知数である三次元の位置の非線形関数である．このため，目標とセンサ間の距離を同時に複数観測し測位する TOA (Time of Arrival) を使用した GPS (Global Positioning System) 等では，Taylor 級数推定法が使用されている [6]～[11]．Taylor 級数推定法は，距離を線形近似して得たモデルに，重み付き最小自乗法を使用して解を算出する．

この Taylor 級数推定法を使用した TSOA 測位は，よく知られた距離差を使用した TDOA (Time Difference of Arrival) 測位以上の性能が実現できる [4], [5]．また，TSOA 測位が可能となるための必要十分条件が明らかになっている [4]．角度を観測しないこの方式は，モノスタティックレーダと比べハードウェアを小

[†] 電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaijihigashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan
[††] 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Information and Engineering, The University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan
DOI:10.14923/transcomj.2016JBP3081

型にできるとの利点がある [1]．ただし，送信信号が必要なため，TDOA よりハードウェアは複雑となる．

更に，距離和と同時に，送信局と目標間のドップラー（距離の変化率）と，受信局と目標間のドップラーの和が観測可能である [1].

このドップラー和の使用により，速度が推定可能となるとともに，距離和のみの観測の場合より目標位置推定精度が向上可能であれば便利である．ただし，ドップラー和を使用した場合の解の存在条件，位置推定精度向上の条件が，距離和のみ観測で測位可能となる条件より厳しくては使いにくい．

なお，TOA 及び TDOA に関する研究結果は数多く報告されているが，TSOA に関する研究成果の報告は極めて少ないのが現状であり [4], [5]，距離和とドップラー和を観測値とした場合の位置，速度の推定可能条件，推定精度の理論解析結果の報告が見当たらない．

なお，マルチスタティックシステムは，電波センサに限らず，マルチスタティックソナーのような音波センサでも提案されている [13].

本論文では，テイラー級数推定法において，距離和のみを観測し目標位置が推定可能となる条件と，距離和とドップラー和を複数同時に観測し位置及び速度が推定可能となる条件の関連を示す．また，ドップラー和の使用により，位置推定精度は向上するかどうかを明らかにする．更に，位置及び速度推定誤差の分散の上界の算出式を示す．

2. 目標位置及び速度の推定

ここでは，n 対の距離和及びドップラー和観測値から，三次元空間での目標位置及び目標速度を推定する方法について述べる．なお，送信局と同一の位置に受信局がある場合も検討対象である．

2.1 距離和の観測モデル

目標とは異なる位置にある送信局 $(i = 0)$ 及び i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の受信局の位置ベクトル $\underline{B}_i$（既知）を，D^T は行列 D の転置行列を表すとして，三次元直交座標により次式で表す．

$$\underline{B}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \tag{1}$$

一方，目標の位置ベクトル $\underline{L}$（未知）の真値を次式で表す．

$$\underline{L} = (x_l, y_l, z_l)^T \tag{2}$$

すると，目標と i 番目の局の距離の真値 R_i は次式となる．

$$R_i = f_i(x_l, y_l, z_l) \tag{3}$$

ここで，次式を定義する．

$$f_i(x, y, z) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \tag{4}$$

すると，送信局と目標間の距離と，i $(i = 1, \cdots, n)$ 番目の受信局と目標間の距離の和の観測値 r_{io} は次式となる．

$$r_{io} = R_0 + R_i + v_i \tag{5}$$

ここで，v_i はランダムな距離和の観測雑音である．

すると，次の式 (7) に全微分の公式を使用して，つぎの性質を得る [4].

（性質 1） 目標の位置推定のための初期値を x^0, y^0, z^0 とすると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\Delta r_{io} \approx\ & (\alpha_i + \alpha_0)(x_l - x^0) + (\beta_i + \beta_0)(y_l - y^0) \\ & + (\gamma_i + \gamma_0)(z_l - z^0) + v_i\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta r_{io} = r_{io} - \{f_i(x^0, y^0, z^0) + f_0(x^0, y^0, z^0)\} \tag{7}$$

$$\alpha_i = -\frac{x_i - x^0}{f_i(x^0, y^0, z^0)}, \quad \beta_i = -\frac{y_i - y^0}{f_i(x^0, y^0, z^0)}$$
$$\gamma_i = -\frac{z_i - z^0}{f_i(x^0, y^0, z^0)} \tag{8}$$

2.2 ドップラー和の観測モデル

目標とは異なる位置にある i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 番目の局の速度ベクトル $\dot{\underline{B}}_i$（既知）を，式 (1) を時間微分して，次式で表す．

$$\dot{\underline{B}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T \tag{9}$$

次に，目標の速度ベクトルを，式 (2) を時間微分して，次式で表す．

$$\dot{\underline{L}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \tag{10}$$

次の性質は，i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 番目の局と目標間のドップラーの真値の算出式を示す [14].

（性質 2） i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 番目の局と目標間のドップラーの真値を $\dot{R}_i$ とすれば，次式を得る [14].

$$\dot{R}_i = g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \tag{11}$$

ここで，次式を定義する．

$$g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{(x_i - x)(\dot{x}_i - \dot{x}) + (y_i - y)(\dot{y}_i - \dot{y}) + (z_i - z)(\dot{z}_i - \dot{z})}{f_i(x, y, z)} \tag{12}$$

すると，送信局と目標間のドップラーと，i $(i = 1, \cdots, n)$ 番目の受信局と目標間のドップラーの和の観測値 $\dot{r}_{io}$ は次式となる．

$$\dot{r}_{io} = \dot{R}_0 + \dot{R}_i + \dot{v}_i \tag{13}$$

ここで，$\dot{v}_i$ はドップラー和のランダムな観測雑音である．

次の性質は，ドップラー和を，目標の位置と速度とで線形近似した結果を示す．なお，証明は，文献 [14] の性質 3 と同様にして，つぎの式 (15) に全微分の公式を使用して，得られる．

（性質 3） 速度推定のための初期値を $\dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0$ とすると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\dot{r}_{io} \approx\ & (\alpha_{0l} + \alpha_{il})(x - x^0) + (\beta_{0l} + \beta_{il})(y - y^0) \\ & + (\gamma_{0l} + \gamma_{il})(z - z^0) + (\alpha_0 + \alpha_i)(\dot{x} - \dot{x}^0) \\ & + (\beta_0 + \beta_i)(\dot{y} - \dot{y}^0) + (\gamma_0 + \gamma_i)(\dot{z} - \dot{z}^0) + \dot{v}_i\end{aligned} \tag{14}$$

ここで，次式を定義する．

$$\begin{aligned}\Delta\dot{r}_{io} = \dot{r}_{io} - \{ & g_0(x^0, y^0, z^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0) \\ & + g_i(x^0, y^0, z^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0)\}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{il} &= -\frac{(\dot{x}_i - \dot{x}^0) f_i(x^0, y^0, z^0) - (x_i - x^0) g_i(x^0, y^0, z^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0)}{f_i(x^0, y^0, z^0)^2}, \\ \beta_{il} &= -\frac{(\dot{y}_i - \dot{y}^0) f_i(x^0, y^0, z^0) - (y_i - y^0) g_i(x^0, y^0, z^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0)}{f_i(x^0, y^0, z^0)^2} \\ \gamma_{il} &= -\frac{(\dot{z}_i - \dot{z}^0) f_i(x^0, y^0, z^0) - (z_i - z^0) g_i(x^0, y^0, z^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0, \dot{z}^0)}{f_i(x^0, y^0, z^0)^2}\end{aligned} \tag{16}$$

2.3 距離和の線形モデル

距離和観測値を n 個得るとすれば，式 (6) を使用して，次式の線形観測モデルを得る．

$$\underline{b}_l = A_l \underline{a}_l + \underline{v}_l \tag{17}$$

ここで，次式を定義する

$$\underline{b}_l = (\Delta r_{1o}, \cdots, \Delta r_{no})^T \tag{18}$$

$$\underline{a}_l = (x - x^0, y - y^0, z - z^0)^T \tag{19}$$

$$\underline{v}_l = (v_1, \cdots, v_n)^T \tag{20}$$

また，式 (8) を使用し，

$$\underline{\omega}(i) = (\alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i) \tag{21}$$

として，次式を定義する．

$$A_l = \left([\underline{\omega}(1) + \underline{\omega}(0)]^T \cdots [\underline{\omega}(n) + \underline{\omega}(0)]^T\right)^T \tag{22}$$

2.4 距離和とドップラー和の線形モデル

距離和及びドップラー和観測値を n 対得るとすれば，式 (6) 及び (14) より，式 (17)～(22) を使用して，次式の線形観測モデルを得る．

$$\underline{b} = A\underline{a} + \underline{v} \tag{23}$$

ここで，

$$\underline{b}_d = (\Delta\dot{r}_{1o}, \cdots, \Delta\dot{r}_{no})^T \tag{24}$$

$$\underline{a}_v = (\dot{x} - \dot{x}^0, \dot{y} - \dot{y}^0, \dot{z} - \dot{z}^0)^T \tag{25}$$

$$\underline{v}_d = (\dot{v}_1, \cdots, \dot{v}_n)^T \tag{26}$$

とし，次式を定義する．

$$\underline{b} = \left(\underline{b}_l^T \quad \underline{b}_d^T\right)^T \tag{27}$$

$$\underline{a} = \left(\underline{a}_l^T \quad \underline{a}_v^T\right)^T \tag{28}$$

$$\underline{v} = \left(\underline{v}_l^T \quad \underline{v}_d^T\right)^T \tag{29}$$

また，式 (16) を使用し，

$$\underline{\kappa}(i) = (\alpha_{il} \quad \beta_{il} \quad \gamma_{il}) \tag{30}$$

とし，$O_{m,n}$ を $m \times n$ の零行列とし，次式を定義する．

$$A_d = \left([\underline{\kappa}(1) + \underline{\kappa}(0)]^T \cdots [\underline{\kappa}(n) + \underline{\kappa}(0)]^T\right)^T \tag{31}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_l & O_{n,3} \\ A_{ld} & A_l \end{pmatrix} \tag{32}$$

2.5 観測雑音共分散行列

観測雑音共分散行列を，$E[\ ]$ は平均を表すとして，次式で定義する．

$$V = E[\underline{v}\,\underline{v}^T] = \begin{pmatrix} V_l & V_{ld} \\ V_{ld}^T & V_d \end{pmatrix} \tag{33}$$

ここで，次式を定義する．

$$V_l = E\left[\underline{v}_l \underline{v}_l^T\right] \tag{34}$$

$$V_d = E\left[\underline{v}_d \underline{v}_d^T\right] \tag{35}$$

$$V_{ld} = E\left[\underline{v}_l \underline{v}_d^T\right] \tag{36}$$

なお，V_l は距離和観測雑音共分散行列，V_d はドップラー和観測雑音共分散行列，V_{ld} は距離和とドップラー和の観測雑音共分散行列である．

ところで，n 対の距離和及びドップラー和観測値は全て送信信号の影響を受ける．このため，式 (34)〜(36) は，一般的なマルチセンサの場合とは異なり対角行列とはならない．しかし，以下では次の条件を仮定する．なお，その妥当性は，付録 B で述べる．ここで，$D > 0$ は行列 D が正値対称行列，$D \geq 0$ は行列 D が半正値対称行列，$\underline{0}$ は零ベクトルを表すとする．

（前提条件 1） 次式が成立するとする．

$$E[\underline{v}] = \underline{0} \tag{37}$$

$$V > 0 \tag{38}$$

2.6 距離和のみによる位置推定

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [15], [16] により，距離和より目標の位置が算出できることを示す [4]．なお，この方法を距離和単独法と呼ぶことにする．

（性質 4） 式 (17) において，重み付き最小自乗法により，次式を最小とする $\underline{\hat{a}}_{lr}$ を推定する．

$$J_l = (\underline{b}_l - A_l \underline{\hat{a}}_{lr})^T V_l^{-1} (\underline{b}_l - A_l \underline{\hat{a}}_{lr}) \tag{39}$$

解は，$A_l^T V_l^{-1} A_l$ が正則ならば，次式である．

$$\underline{\hat{a}}_{lr} = (A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} A_l^T V_l^{-1} \underline{b}_l \tag{40}$$

次に，本論文で使用する解が存在するための条件について述べる．

（前提条件 2） $\underline{\omega}(i) + \underline{\omega}(0)$ $(i = 1, \cdots, n)$ のうち．いずれか 3 個が一次独立とする．なお，$3 \leq n$ とする．

次の性質は，式 (21) の単位ベクトル $\underline{\omega}(i)$ を使用した式 (40) が算出できるための必要十分条件を示す [4]．

（性質 5） 前提条件 2 が成立するときのみ，$A_l^T V_l^{-1} A_l$ は正値対称行列である．

なお，性質 5 は，次のように拡張できる．

（系 1） P は $n \times n$ の正値対称行列とする．すると $A_l^T P A_l$ は正値対称行列である．

次の性質は，算出した目標位置が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す [4]．

（性質 6） 式 (40) は，次の性質を有する．

$$E\left[\underline{\hat{a}}_{lr}\right] = \underline{a} \tag{41}$$

$$E\left[(\underline{\hat{a}}_{lr} - \underline{a}_l)(\underline{\hat{a}}_{lr} - \underline{a}_l)^T\right] = (A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} \tag{42}$$

2.7 距離和とドップラー和による位置・速度推定

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [15], [16] により，距離和とドップラー和より，目標の位置及び速度が算出できることを示す．なお，この方法をドップラー和併用法と呼ぶことにする．

（性質 7） 式 (23) において，重み付き最小自乗法により，次式を最小とする $\underline{\hat{a}}$ を推定する．

$$J = (\underline{b} - A\underline{\hat{a}})^T V^{-1} (\underline{b} - A\underline{\hat{a}}) \tag{43}$$

解は，$A^T V^{-1} A$ が正則ならば，次式である．

$$\underline{\hat{a}} = (A^T V^{-1} A)^{-1} A^T V^{-1} \underline{b} \tag{44}$$

次の性質は，式 (44) が算出できるための必要十分条件を示す．なお，$(\underline{c}, \underline{d})$ は，ベクトル $\underline{c}, \underline{d}$ の内積を表すとする．

（性質 8） 前提条件 2 が成立するときのみ，$A^T V^{-1} A$ は正値対称行列である．

（証明） 前提条件 2 が成立するとする．なお，式 (38) より，$A^T V^{-1} A \geq 0$ は自明である．このため，三次元ベクトル $\underline{x}, \underline{y}$ に対して，

$$\left(A^T V^{-1} A \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{45}$$

とする．すると，次式を得る．

$$\left(V^{-1} A \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right) = 0 \tag{46}$$

式 (38) より $V^{-1} > 0$ であるので，式 (46) より次式を得る．

$$A \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \underline{0} \tag{47}$$

式 (32) 及び (47) より，次式を得る．

$$A_l \underline{x} = \underline{0} \tag{48}$$

$$A_{ld} \underline{x} + A_l \underline{y} = \underline{0} \tag{49}$$

式 (22) 及び前提条件 2 より A_l の階数は 3 であるので，式 (48) より，次式を得る．

$$\underline{x} = \underline{0} \tag{50}$$

式 (49) 及び (50) より，次式を得る．

$$A_l \underline{y} = \underline{0} \tag{51}$$

A_l の階数は 3 であるので，式 (51) より，次式を得る．

$$\underline{y} = \underline{0} \tag{52}$$

式 (50) 及び (52) より，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A > 0 \tag{53}$$

逆に，式 (53) が成立するとする．このとき，前提条件 2 が成立しないとする．すると，式 (22) 及び (32) より，A の階数は 5 以下である．したがって，次式を満たす六次元ベクトル $\underline{C}$ が存在する．

$$A\underline{c} = \underline{0} \tag{54}$$

$$\underline{c} \neq \underline{0} \tag{55}$$

式 (54) より，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A \underline{c} = \underline{0} \tag{56}$$

式 (53) 及び (56) より，次式を得る．

$$\underline{c} = \underline{0} \tag{57}$$

式 (55) 及び (57) は矛盾しており，前提条件 2 が成立しないとの仮定は誤りである．(証明終)

なお，性質 8 は，次のように拡張できる．

(系 2)　前提条件 2 が成立するとともに，Q は $2n \times 2n$ の正値対称行列とする．すると $A^T Q A$ は正値対称行列である．

次の性質は，算出した目標位置及び速度が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す [15], [16]．

(性質 9)　式 (44) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}] = \underline{a} \tag{58}$$

$$E\left[(\underline{\hat{a}} - \underline{a})(\underline{\hat{a}} - \underline{a})^T\right] = (A^T V^{-1} A)^{-1} \tag{59}$$

3. 推定精度の解析

3.1 ドップラー和併用法の位置及び速度推定精度

ここでは，ドップラー和併用法における位置及び速度各々の推定誤差の性質について述べる．

まず，

$$N_l = (I_3 \ \ 0I_3) \tag{60}$$

$$N_v = (0I_3 \ \ I_3) \tag{61}$$

とすると，式 (28) より，次式を得る．

$$\underline{a}_l = N_l \underline{a} \tag{62}$$

$$\underline{a}_v = N_v \underline{a} \tag{63}$$

すると，式 (44) を使用して，ドップラー和併用法における位置及び速度推定値を各々次のように定義できる．

$$\underline{\hat{a}}_l = N_l \underline{\hat{a}} \tag{64}$$

$$\underline{\hat{a}}_v = N_v \underline{\hat{a}} \tag{65}$$

次の二つの性質は，ドップラー和併用法における位置及び速度の推定値が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す．なお，証明は，性質 9 より得られる．

(性質 10)　式 (64) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}_l] = \underline{a}_l \tag{66}$$

$$E\left[(\underline{\hat{a}}_l - \underline{a}_l)(\underline{\hat{a}}_l - \underline{a}_l)^T\right] = N_l (A^T V^{-1} A)^{-1} N_l^T \tag{67}$$

(性質 11)　式 (65) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}_v] = \underline{a}_v \tag{68}$$

$$E\left[(\underline{\hat{a}}_v - \underline{a}_v)(\underline{\hat{a}}_v - \underline{a}_v)^T\right] = N_v (A^T V^{-1} A)^{-1} N_v^T \tag{69}$$

3.2 観測雑音共分散行列の逆行列の特徴

ここでは，ドップラー和併用法における位置及び速度推定誤差の解析に使用する式 (33) の逆行列の性質について述べる．

(性質 12)

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$G = G_{11} - V_l^{-1} \tag{71}$$

とすれば，次式を得る．

$$G \geq 0 \tag{72}$$

$$\begin{pmatrix} G & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{pmatrix} \geq 0 \tag{73}$$

$$G_{22} > 0 \tag{74}$$

また，

$$G(m) = \begin{pmatrix} G + \frac{1}{m} I_n & G_{12} \\ G_{12}^T & G_{22} \end{pmatrix} \tag{75}$$

とすれば，任意の自然数 m に対して，次式を得る．

$$G(m) > 0 \tag{76}$$

（証明） 式 (38) より V^{-1} は正値対称行列であるので，式 (70) より，式 (74) を得る．また，式 (70) 及び (33) に付録の定理 1 を使用して，式 (72) 及び (73) を得る．

ここで，n 次元ベクトル $\underline{x}, \underline{y}$ に対して，式 (75) 及び (73) より，次式が成立する．

$$\left(G(m) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right) \geq \frac{1}{m} (\underline{x}, \underline{x}) \geq 0 \tag{77}$$

式 (77) が 0 となるのは，任意の自然数 m に対して，$\underline{x} = \underline{0}$ のときのみである．また，$\underline{x} = \underline{0}$ のとき，式 (75) 及び (74) より，次式を得る．

$$\left(G(m) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right) = (G_{22}\underline{y}, \underline{y}) \geq 0 \tag{78}$$

式 (78) が 0 となるのは，式 (74) より，$\underline{y} = \underline{0}$ のときのみである．すなわち，式 (76) を得る．（証明終）

3.3 位置推定誤差の比較

次の性質は，式 (67) 及び (42) より，ドップラー和併用法の位置推定精度は，距離和単独法以上となることを示す．

（性質 13） 前提条件 2 が成立するとする．すると，次式を得る，

$$N_l (A^T V^{-1} A)^{-1} N_l^T \leq [A_l^T V_l^{-1} A_l]^{-1} \tag{79}$$

（証明） 式 (32) 及び (68) より，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A = \begin{pmatrix} A_l^T G_{11} A_l + F_{11} & F_{12} \\ F_{12}^T & A_l^T G_{22} A_l \end{pmatrix} \tag{80}$$

ここで，次式を定義する．

$$F_{11} = A_{ld}^T G_{12}^T A_l + A_l^T G_{12} A_{ld} + A_{ld}^T G_{22} A_{ld} \tag{81}$$

$$F_{12} = A_l^T G_{12} A_l + A_{ld}^T G_{22} A_l \tag{82}$$

性質 8 より $A^T V^{-1} A$ は正値対称行列であるので，付録の定理 1 及び式 (58) を使用して，次式を得る．

$$N_l (A^T V^{-1} A)^{-1} N_l^T = K^{-1} > 0 \tag{83}$$

ここで，次式を定義する．

$$K = A_l^T G_{11} A_l + F_{11} - F_{12} [A_l^T G_{22} A_l]^{-1} F_{12}^T \tag{84}$$

式 (84) 及び (71) より，次式を得る．

$$\begin{aligned} K &- A_l^T V_l^{-1} A_l \\ &= A_l^T G A_l + F_{11} - F_{12} [A_l^T G_{22} A_l]^{-1} F_{12}^T \end{aligned} \tag{85}$$

式 (80) と同様にして，式 (75) より，任意の自然数に m に対して，次式を得る．

$$\begin{aligned} &A^T G(m) A \\ &= \begin{pmatrix} A_l^T G A_l + \frac{1}{m} A_l^T A_l + F_{11} & F_{12} \\ F_{12}^T & A_l^T G_{22} A_l \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{86}$$

系 2 及び式 (76) より，式 (86) は正値対称行列であるので．付録の定理 1 が使用可能となる．この結果，式 (86) より次式を得る．

$$A_l^T G A_l + \frac{1}{m} A_l^T A_l + F_{11} - F_{12} [A_l^T G_{22} A_l]^{-1} F_{12}^T > 0 \tag{87}$$

式 (85) 及び (87) より，次式を得る．

$$K - A_l^T V_l^{-1} A_l + \frac{1}{m} A_l^T A_l > 0 \tag{88}$$

式 (88) において，極限 $(m \to \infty)$ をとり，次式を得る．

$$K - A_l^T V_l^{-1} A_l \geq 0 \tag{89}$$

性質 5，式 (83) 及び (89) より，次式を得る．

$$0 < A_l^T V_l^{-1} A_l \leq [N (A^T V^{-1} A)^{-1} N^T]^{-1} \tag{90}$$

式 (90) より，式 (79) を得る．（証明終）

3.4 推定誤差の上界

ここでは，位置及び速度推定誤差の分散の上界の算出式を示す．これらを使用すれば，目標と送受信局の配置ごとに，推定誤差の上界がモンテカルロシミュ

レーションを使用せずに見積り可能である．

次の性質は，式 (42) の距離和単独法の位置推定誤差共分散行列の上界を示す．なお，性質 13 より，ドップラー和併用法の位置推定誤差共分散行列の上界でもある．ここで，式 (22) の特異値は，$A_l^T A_l$ の固有値の平方根と等価である [18]．

（性質 14） 前提条件 2 が成立するとする．また，A_l の最小特異値を $\lambda_{l,\min}$ とする．更に，距離和観測雑音共分散行列 V_l の固有値のうち最大値を $\sigma_{l,\max}^2$，とする．すると，次式を得る．

$$(A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} \leq \frac{\sigma_{l,\max}^2}{\lambda_{l,\min}^2} I_3 \tag{91}$$

（証明） 系 1 より，$A_l^T A_l$ は正値対称行列であるので，その固有値は，全て正である．したがって，次式を得る．

$$0 < \lambda_{l,\min}^2 I_3 \leq A_l^T A_l \tag{92}$$

また，式 (35) 及び (38) より，次式を得る．

$$0 < V_l \leq \sigma_{l,\max}^2 I_n \tag{93}$$

ここで，n 次元ベクトル $\underline{x}$ に対して，次式を得る．

$$(A_l^T V_l^{-1} A_l \underline{x}, \underline{x}) = (V_l^{-1} A_l \underline{x}, A_l \underline{x}) \tag{94}$$

式 (93) 及び (94) より，次式を得る．

$$\frac{1}{\sigma_{l,\max}^2}(A_l \underline{x}, A_l \underline{x}) \leq (A_l^T V_l^{-1} A_l \underline{x}, \underline{x}) \tag{95}$$

式 (92) 及び (95) より，次式を得る．

$$0 < \frac{\lambda_{l,\min}^2}{\sigma_{l,\max}^2}(\underline{x}, \underline{x}) \leq (A_l^T V_l^{-1} A_l \underline{x}, \underline{x}) \tag{96}$$

式 (96) より，次式を得る．

$$0 < \frac{\lambda_{l,\min}^2}{\sigma_{l,\max}^2} I_3 \leq A_l^T V_l^{-1} A_l \tag{97}$$

式 (97) より，式 (91) を得る．（証明終）

次の性質は，式 (69) のドップラー和併用法の速度単体の推定誤差共分散行列の上界を示す．なお，文献 [17] では，式 (59) の上界の算出式を示したが，速度の上界の算出式は示していなかった．

（性質 15） 前提条件 2 が成立するとする．ここで，

$$B_v = A_l^T A_l - A_l^T A_{ld}[A_l^T A_l + A_{ld}^T A_{ld}]^{-1} A_{ld}^T A_l \tag{98}$$

とし，B_v の最小固有値を $\mu_{v,\min}$ とする．更に，観測雑音共分散行列 V の固有値のうち最大値を $\sigma_{\max}^2$ とする．すると，$\mu_{v,\min}$ は正で，次式を得る．

$$N_v(A^T V^{-1} A)^{-1} N_v^T \leq \frac{\sigma_{\max}^2}{\mu_{v,\min}} I_3 \tag{99}$$

（証明） 式 (32) より，次式を得る．

$$A^T A = \begin{pmatrix} A_l^T A_l + A_{ld}^T A_{ld} & A_{ld}^T A_l \\ A_l^T A_{ld} & A_l^T A_l \end{pmatrix} \tag{100}$$

系 2 を使用して，$A^T A$ は正値対称行列である．この結果，式 (100) に，付録の定理 1 及び式 (98)，(59) を使用して，次式を得る．

$$0 < \mu_{v,\min} I_3 \leq B_v \tag{101}$$

$$N_v(A^T A)^{-1} N_v^T = B_v^{-1} \tag{102}$$

また，式 (38) を使用して，次式を得る．

$$0 < V \leq \sigma_{\max}^2 I_{2n} \tag{103}$$

ここで，次式を得る．

$$(A^T V^{-1} A \underline{x}, \underline{x}) = (V^{-1} A \underline{x}, A \underline{x}) \tag{104}$$

式 (103) 及び (104) より，次式を得る．

$$\frac{1}{\sigma_{\max}^2}(A \underline{x}, A \underline{x}) \leq (A^T V^{-1} A \underline{x}, \underline{x}) \tag{105}$$

式 (105) より，次式を得る．

$$0 < \frac{1}{\sigma_{\max}^2} A^T A \leq A^T V^{-1} A \tag{106}$$

式 (106) より，次式を得る．

$$0 < (A^T V^{-1} A)^{-1} \leq \sigma_{\max}^2 (A^T A)^{-1} \tag{107}$$

式 (107) に，式 (102) を使用して，次式を得る．

$$N_v(A^T V^{-1} A)^{-1} N_v^T \leq \sigma_{\max}^2 B_v^{-1} \tag{108}$$

式 (101) より，次式を得る．

$$B_v^{-1} \leq \frac{1}{\mu_{v,\min}} I_3 \tag{109}$$

式 (108) に，式 (109) を使用して，式 (99) を得る．（証明終）

4. 考　　察

4.1 解の存在条件と所要受信局数

性質 5 及び 8 は，距離和単独法もドップラー和併用

も，推定可能となる必要十分条件は前提条件 2 であることを示す．この結果は，両方法とも，推定には最低 3 個の受信局が必要であることを示す．

4.2 受信局が 3 個の場合の特徴

次の性質は，受信局が 3 個の場合，ドップラー和併用法と距離和単独法の位置推定結果は同一であることを示す．すなわち，ドップラー和を使用して位置推定精度を改善するには，最低 4 個の受信局が必要であることを示す．なお，性質 16 は，受信局が 3 個の場合，未知数と方程式数（観測値数）がそれぞれ 6 と一致することを使用して得られる．しかし，従来のドップラーを併用した TOA あるいは TDOA [14], [17] では，未知数と方程式数とが一致することはないため，性質 16 のような結論は得られない．

（性質 16） 前提条件 2 が成立するとする．また，$n = 3$ とする．すると，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_l = \underline{\hat{a}}_{lr} = A_l^{-1}\underline{\hat{b}}_l \tag{110}$$

$$\underline{\hat{a}}_v = -A_l^{-1}A_{ld}A_l^{-1}\underline{b}_l + A_l^{-1}\underline{b}_d \tag{111}$$

（証明） 式 (22) 及び前提条件 2 より，行列 A_l は 3×3 の正則行列である．したがって，式 (40) より，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_{lr} = A_l^{-1}\underline{b}_l \tag{112}$$

式 (22)，(31)，(32) 及び前提条件 2 より，行列 A は 6×6 の正則行列で，次式を得る．

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_l^{-1} & 0I_3 \\ -A_l^{-1}A_{ld}A_l^{-1} & A_l^{-1} \end{pmatrix} \tag{113}$$

式 (44) に，式 (62)，(63)，(113) 及び (27) を使用して，次式を得る．

$$\begin{pmatrix} \underline{\hat{a}}_l \\ \underline{\hat{a}}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_l^{-1} & 0I_3 \\ -A_l^{-1}A_{ld}A_l^{-1} & A_l^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{b}_l \\ \underline{b}_d \end{pmatrix} \tag{114}$$

式 (112) 及び (114) より，結論を得る．（証明終）

なお，受信局が 3 個の場合，性質 16 は，距離和単独法もドップラー和併用も，推定値の算出に観測雑音共分散行列は不要であることを示す．また，性質 16 は，式 (79) の両辺が等しい例があることを示す．

4.3 ドップラー併用の TOA，TDOA との関連

送信局と同一の位置にある受信局がある場合，距離和とドップラー和より，距離とドップラーが算出できる．この算出結果を使用すれば，従来のドップラーを併用した TOA や TDOA [14], [17] がマルチスタティックレーダにも使用可能である．本論文の方法と，これらの方法との比較は今後の課題である．

なお，従来のドップラーを併用した TOA では，センサ間の距離もドップラーも無相関と仮定した [14]．また，従来のドップラーを併用した TDOA では，距離差とドップラーは無相関，ドップラーは受信局間で無相関と仮定した [17]．

しかし，マルチスタティックレーダでは，各受信局での距離和及びドップラー和の計測に，送信信号の情報を共通に使用するため，受信局間で相関があると仮定した（付録 B 参照）．また，本論文では，適用範囲を確保するため，距離和及びドップラー和は無相関とは限らないとした．

4.4 数 値 例

本節では，推定誤差の数値計算結果を示す．なお，簡明な数値計算にするため，初期値には真値を使用し，収束計算は行っていない．また，送受信局は固定位置に設置されているとした．

表 1 に，位置の単位は m，速度の単位は m/s として，目標の位置が $\underline{L} = (0,0,0)^T$，目標の速度が $\underline{\dot{L}} = (1,2,0)^T$，送信局の位置が $\underline{B}_0 = (-6,0,6.5)^T$，受信局の位置が $\underline{B}_1 = (4,4,9)^T$，$\underline{B}_2 = (4,-4,9)^T$，$\underline{B}_3 = (-4,4,9)^T$，$\underline{B}_4 = (-4,-4,9)^T$，送受信局で観測雑音の標準偏差は同一値とし，付録の式 (B-5) の距離観測雑音の標準偏差が $\sigma_i = 0.5$，式 (B-6) のドップラー観測雑音の標準偏差が $\dot{\sigma}_i = 0.025$，距離観測雑音とドップラー観測雑音は無相関とした場合の推定誤差標準偏差の理論値及びシミュレーション値を示す．なお，試行回数は，5000 回である．

表 1 は，性質 13 の結論を裏付けている．また，推定誤差の理論値とシミュレーション値がよく一致して

表 1 推定誤差の比較（標準偏差）
Table 1 Comparison of estimated errors (standard deviation).

		距離和単独法		ドップラー和併用法	
		理論値	シミュレーション値	理論値	シミュレーション値
位置	x	0.587	0.588	0.351	0.349
	y	0.587	0.588	0.538	0.537
	z	0.658	0.658	0.546	0.543
速度	x	–	–	0.055	0.054
	y	–	–	0.097	0.096
	z	–	–	0.145	0.145

いることを示す．

5. むすび

本論文では，距離和単独法で目標位置が推定可能となる条件と，ドップラー和併用法で位置及び速度が推定可能となる条件は同一であることを示した．また，ドップラー和併用法は，ドップラー和の観測精度や送受信局の配置によらず，距離和単独法以上の位置推定精度となることを示した．これらの結果，ドップラー和の使用が有効なことが分かった．なお，推定可能となるためには，最低 3 個の受信局が必要である．ただし，ドップラー和を使用して位置推定精度を改善するには，最低 4 個の受信局が必要である．更に，位置及び速度推定誤差の分散の上界の算出式を示した．

文献

[1] 稲葉敬之，千葉　勇，“CW 波を用いたマルチスタティック測位・測速法,” 信学論（B），vol.J90-B, no.3, pp.298–310, March 2007.

[2] L. Bogler, Radar Principles with Applications to Tracking Systems, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[3] S.S. Blackman and R. Popoli, Design and Analysis of Modern Tracking Systems, Artech House, Boston, 1999.

[4] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，秋田　学，稲葉敬之，“テイラー級数推定法を用いた TSOA による測位法の性能,” 信学論（B），vol.J99-B, no.10, pp.966–975, Oct. 2016.

[5] X. Zheng, Z. Hua, Z. Zheng, H. Peng, and L. Meng, “Wireless localization based on the time sum of arrival and Taylor expansion,” 19th IEEE International Conference on Networks (ICON), 2013, Dec. 2013.

[6] 佐田達典，GPS 測量技術，オーム社，東京，2003.

[7] 安田明生，“GPS の現状と展望,” 信学誌，vol.82, no.12, pp.1207–1215, Dec. 1999.

[8] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[9] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[10] 坂井丈泰，GPS 技術入門，東京電機大学出版局，東京，2003.

[11] J. Yan, C.C.J.M. Tiberious, G.J.M. Janssen, P.J.G. Teunissen, and G. Bellusci, “Review of Range-Based Positioning Algoritmsn,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. Mag., vol.28, no.6, pp.2–27, Aug. 2013.

[12] W.H. Foy, “Position-location Solutions by Taylor-series Estimation,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.12, no.2, pp.187–194, March 1976.

[13] S. Coraluppi, “Multistatic Sonar Localization,” IEEE J. Ocean. Eng.., vol.31, no.4, pp.964–974, Oct. 2006.

[14] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，秋田　学，稲葉敬之，“距離とドップラーを観測値とするテイラー級数推定法を用いた三次元の位置及び速度推定の解析,” 信学論（B），vol.J98-B, no.8, pp.830–839, Aug. 2015.

[15] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[16] A.H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, San Diego, 1970.

[17] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，秋田　学，稲葉敬之，“ドップラー観測値を併用する TDOA の位置・速度推定,” 信学論（B），vol.J99-B, no.3, pp.230–240, March 2016.

[18] 中川　徹，小柳義夫，最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，東京，1982.

付録

（付録 A）

（定理 1）　D は $(m+n)\times(m+n)$，D_{11} は $m\times m$，D_{22} は $n\times n$ の行列で，

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{pmatrix}>0 \tag{A·1}$$

とする．すると，D_{11}, D_{22}, $H_1=D_{11}-D_{12}D_{22}^{-1}D_{12}^T$ 及び $H_2=D_{22}-D_{12}^TD_{11}^{-1}D_{12}$ は，正値対称行列で，次式が成立する [9]．

$$\begin{aligned} D^{-1} &= \\ &\begin{pmatrix} H_1^{-1} & -H_1^{-1}D_{12}D_{22}^{-1} \\ -D_{22}^{-1}D_{12}^TH_1^{-1} & D_{22}^{-1}+D_{22}^{-1}D_{12}^TH_1^{-1}D_{12}D_{22}^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_{11}^{-1}+D_{11}^{-1}D_{12}H_2^{-1}D_{12}^TD_{11}^{-1} & -D_{11}^{-1}D_{12}H_2^{-1} \\ -H_2^{-1}D_{12}^TD_{11}^{-1} & H_2^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A·2}$$

更に，次式が成立する [4]．

$$D^{-1}\geq\begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & O_{m,n} \\ O_{n,m} & 0I_n \end{pmatrix} \tag{A·3}$$

（付録 B）

距離 R_i の観測雑音を w_i，ドップラー $\dot{R}_i$ の観測雑音を $\dot{w}_i$ とすれば，次式が成立する（式 (5) 及び (13) 参照）．

$$v_i=w_0+w_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{A·4}$$

$$\dot{v}_i=\dot{w}_0+\dot{w}_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{A·5}$$

なお，観測雑音の平均は 0，また異なる局間の観測雑音は無相関として，次式を仮定する．

$$E[w_i] = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{A·6}$$

$$E[\dot{w}_i] = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{A·7}$$

$$E[w_i w_j] = \sigma_i^2 \ (i = j),\ 0\ (i \neq j) \tag{A·8}$$

$$E[\dot{w}_i \dot{w}_j] = \dot{\sigma}_i^2 \ (i = j),\ 0\ (i \neq j) \tag{A·9}$$

$$E[w_i \dot{w}_j] = \rho_i \sigma_i \dot{\sigma}_i \ (i = j),\ 0\ (i \neq j) \tag{A·10}$$

ここで，σ_i は距離観測雑音の標準偏差，$\dot{\sigma}_i$ はドップラー観測雑音の標準偏差，ρ_i は距離観測雑音とドップラー観測雑音との相関係数である．

つぎの性質は，前提条件 1 が妥当であることを示す．
（性質 B–1） 式 (37) が成立する．また，$\sigma_i > 0$, $\dot{\sigma}_i > 0$, $|\rho_i| < 1$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ とすると，式 (38) が成立する．
（証明） まず，次のような n 次元ベクトルを定義する．

$$\underline{w}_{l0} = (w_0, \cdots, w_0)^T \tag{A·11}$$

$$\underline{w}_l = (w_1, \cdots, w_n)^T \tag{A·12}$$

$$\underline{w}_{d0} = (\dot{w}_0, \cdots, \dot{w}_0)^T \tag{A·13}$$

$$\underline{w}_d = (\dot{w}_1, \cdots, \dot{w}_n)^T \tag{A·14}$$

すると，式 (20) 及び (26) に，式 (A·4)，(A·5) をそれぞれ使用して．次式を得る．

$$\underline{v}_l = \underline{w}_l + \underline{w}_{l0} \tag{A·15}$$

$$\underline{v}_d = \underline{w}_d + \underline{w}_{d0} \tag{A·16}$$

式 (29) に式 (A·15) 及び (A·16) を使用した後，式 (A·11)～(A·14) を使用し平均を取れば，式 (A·6) 及び (A·7) より，式 (37) を得る．

また，式 (34) に式 (A·15) を使用した後，式 (A·11) 及び (A·12) を使用すれば，式 (A·8) より，次式を得る．

$$V_l = diag\{\sigma_1^2 \cdots \sigma_n^2\} + \sigma_0^2 E_n \tag{A·17}$$

ここで，$diag\{a_1, \cdots, a_n\}$ は対角成分を $a_1, \cdots, a_n$ とする対角行列，E_n は要素が全て 1 である次式のような $n \times n$ の行列である．

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{A·18}$$

式 (35) 及び (36) より，式 (A·17) と同様にして，次式を得る．

$$V_d = diag\{\dot{\sigma}_1^2 \cdots \dot{\sigma}_n^2\} + \dot{\sigma}_0^2 E_n \tag{A·19}$$

$$V_{ld} = diag\{\rho_1 \sigma_1 \dot{\sigma}_1 \cdots \rho_n \sigma_n \dot{\sigma}_n\} + \rho_0 \sigma_0 \dot{\sigma}_0 E_n \tag{A·20}$$

ここで，次式を定義する．

$$W_i = E\left[\begin{pmatrix} w_i \\ \dot{w}_i \end{pmatrix} (w_i \ \ \dot{w}_i)\right] \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{A·21}$$

すると，x，y を実数とすれば，式 (A·8)～(A·10) 及び仮定より，次式を得る．

$$\left(W_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \sigma_i^2 x^2 + 2\rho_i \sigma_i \dot{\sigma}_i xy + \dot{\sigma}_i^2 y^2 \tag{A·22}$$

$$W_i > 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{A·23}$$

n 次元ベクトル $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_n)^T$ に対し．式 (33) に式 (A·17)，(A·19) 及び (A·20) を使用した後，式 (A·22) を使用すれば，次式を得る．

$$\begin{aligned} \left(V \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \right) &= \sum_{i-1}^{n} \left(W_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \right) \\ &+ \left(W_0 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \tag{A·24}$$

式 (A·24) に式 (A·23) を使用し，式 (38) を得る．（証明終）

（平成 28 年 12 月 5 日受付，29 年 2 月 20 日再受付，
4 月 12 日早期公開）

小菅 義夫 （正員）

昭 47 早大・理工・数学卒．昭 49 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平 16 長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員．電通大特任教授．工博．IEEE シニア会員．

古賀　禎　（正員）

平 5 年東京理科大・理工・電気卒．平 7 年同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入所．平 13 年カリフォルニア大デービス校客員研究員．工博．二次監視レーダ，空港面監視システムの研究に従事．

宮崎　裕己　（正員）

平 3 信州大・工卒．平 5 同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入省．以来，二次監視レーダやマルチラテレーションに関する研究開発に従事．電気学会会員．

呂　暁東　（正員）

平 17 東工大大学院情報理工学研究科博士課程了．同年同大学助教．平 24 電子航法研究所入所．工博．分散コンピューティング，航空監視システム，交通情報システムなどの研究に従事．IEEE シニア会員．

秋田　学　（正員）

平 17 大阪大・工・電子情報エネルギー工卒，平 20 同大大学院博士前期課程了．平 23 同大大学院博士後期課程了．平 24 ニューメキシコ工科大学博士研究員．平 25 電気通信大学大学院情報理工学研究科助教．

稲葉　敬之　（正員）

昭 56 東工大・理・物理卒，昭 58 同大大学院修士課程了．同年，三菱電機（株）入社．平 20 年 4 月より電通大教授．工博．レーダ信号処理，超電導磁気センサ信号処理，アダプティブアレー信号処理，車載レーダの研究開発等に従事．IEEE シニア会員．