論　文

ドップラー観測値併用のTOAとTDOA測位精度の同一性

小菅　義夫[†,††]　古賀　禎[†]　宮崎　裕己[†]　秋田　学[††]
稲葉　敬之[††]

Identity with TOA and TDOA Location System Using Additional Doppler Measurements in terms of Estimation Accuracy

Yoshio KOSUGE[†,††], Tadashi KOGA[†], Hiromi MIYAZAKI[†], Manabu AKITA[††], and Takayuki INABA[††]

あらまし　本論文は，テイラー級数推定法を用いて，距離（あるいは距離差）及びドップラーを同時に複数観測し，目標の位置及び速度を推定する場合の精度について述べる．なお，送受信機間に時計オフセット誤差がある場合の距離を観測値とするTOA（Time of Arrival）と，時計オフセット誤差を消去した距離差を観測値とするTDOA（Time Difference of Arrival）は，同一の測位精度となることが報告されている．また，ドップラーと距離を観測値とするTOAは，距離のみを観測する場合に測位が可能ならば，ドップラーを併用しても位置と速度が推定可能なこと，及びドップラーの使用による位置推定精度の劣化はないことが報告されている．したがって，上記の同一精度であるとの結論がドップラー観測値を併用する場合に拡張できれば，TDOAでもドップラーの併用が有効なことが直ちに分かる．本論文では，ドップラー観測値を併用する場合でも，TDOAと時計オフセットを未知数とするTOAとで，推定精度は同一であることを解析的に示す．

キーワード　TOA，GPS，測位，TDOA，時計オフセット誤差，距離，ドップラー，誤差解析

1. まえがき

本論文は，距離（あるいは距離差）及びドップラーを同時に複数観測し，目標の位置及び速度を推定する場合の精度について述べる．この推定では，目標が送信源の場合と，目標が受信機を搭載している場合がある．後者の代表例は，GPS（Global Positioning System）である [1]～[7]．以下，記述を容易にするため，目標が送信機を有しているとする．

TOA（Time of Arrival）では，送受信機間の時間差より算出した距離を観測値として，位置推定を行う．この場合，三次元の位置と，送受信機間の時計オフセット誤差の4個が未知数となる [1]～[7]．また，時計オフセット誤差を消去した距離差を観測値とするTDOA（Time Difference of Arrival）では，三次元の位置の3個が未知数となる [8], [9]．なお，送信時刻が付与されない場合でも，送信時刻を仮に与え，時計オフセット誤差を未知数とすれば，TOAでも，三次元の位置が推定可能である．

ここで，距離は，未知数の非線形関数である．したがって，推定は，非線形の連立方程式を解くことと等価となる．この連立方程式を解くため，GPS等では，解の初期値を仮に与え，Taylor展開により線形近似した得た線型モデルに，重み付き最小自乗法 [10], [11] を使用し解を算出している [1], [3]～[7]．

ところで，TDOAは，時計オフセット誤差を未知数とする場合のTOAと，同一の位置推定精度となることが報告されている [12]．

また，ドップラーと距離を観測値とするTOAは，距離のみを観測する場合に測位が可能ならば，ドップラーを併用しても位置と速度が推定可能なこと，及びドップラーの使用による位置推定精度の劣化はないことが報告されている [13]．一方，TDOAでもドップ

† 電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaiji-higashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan
†† 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Information and Engineering, University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan
DOI: 10.14923/transcomj.2016JBP3039

ラーの併用が有効なことが報告されている [14].

このため，文献 [12] の結果がドップラー観測値を併用する場合に拡張できれば，TOA と TDOA のどちらかで出した有用な結論は，他方にも使用可能となり便利である.

本論文では，ドップラー観測値を併用する場合の TDOA は，時計オフセット誤差を未知数とする TOA と位置及び速度の推定精度が同一であるか否かを解析的に示す.

2. TOA による目標位置及び速度の推定

ここでは，n 対の距離及びドップラー観測値から，目標位置及び目標速度を推定する方法について述べる.

2.1 距離の観測モデル

まず，目標とは異なる位置にある i $(i = 1, \cdots, n)$ 番目の受信機の位置ベクトル $\underline{B}_i$（既知）を，D^T は行列 D の転置行列を表すとして，次式で表す．なお，座標系は，三次元直交座標を使用する.

$$\underline{B}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \tag{1}$$

つぎに，目標の位置を次式で表す.

$$\underline{L} = (x, y, z)^T \tag{2}$$

すると，i 番目の送受信機間の距離の真値 R_i は次式となる.

$$R_i = f_i(x, y, z) \tag{3}$$

ここで，次式を定義する.

$$f_i(x, y, z) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \tag{4}$$

すると，i 番目の送受信機間の距離の観測値 R_{io} は次式となる.

$$R_{io} = R_i + S + v_i \tag{5}$$

ここで，S は時計オフセット誤差による距離のバイアス誤差，v_i はランダムな距離の観測誤差である．なお，本論文では，複数の送信機間あるいは受信機間で時刻同期は取れているが，送受信機間では時刻同期は必ずしも取れていないとする．また，送受信機間でマルチパスの影響はなく，時計オフセット誤差による距離バイアス誤差以外は，ランダム誤差のみとする [3]～[7].

すると，次の式 (7) に全微分の公式を使用し，次の性質を得る [1], [3]～[7].

（性質 1）目標の位置推定のための初期値を x_0，y_0，z_0 とすると，次式を得る.

$$\Delta R_{io} = (\ \alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i\ )\underline{a}_l + S + v_i \tag{6}$$

ここで，次式を定義する.

$$\Delta R_{io} = R_{io} - f_i(x_0, y_0, z_0) \tag{7}$$

$$\underline{a}_l = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)^T \tag{8}$$

$$\alpha_i = \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0, z_0),\ \beta_i = \frac{\partial f_i}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),$$
$$\gamma_i = \frac{\partial f_i}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \tag{9}$$

2.2 ドップラーの観測モデル

i 番目の受信機の速度ベクトル $\dot{\underline{B}}_i$（既知）を，式 (1) を時間微分し，次式で表す.

$$\dot{\underline{B}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T \tag{10}$$

つぎに，目標の速度ベクトルを，式 (2) を時間微分し，次式で表す.

$$\dot{\underline{L}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \tag{11}$$

すると，次の性質を得る [13].

（性質 2）i 番目の送受信機間のドップラーの真値を $\dot{R}_i$ とすれば，次式を得る.

$$\dot{R}_i = g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \tag{12}$$

ここで，次式を定義する.

$$g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{(x_i - x)(\dot{x}_i - \dot{x}) + (y_i - y)(\dot{y}_i - \dot{y}) + (z_i - z)(\dot{z}_i - \dot{z})}{f_i(x, y, z)} \tag{13}$$

すると，i 番目の送受信機間のドップラーの観測値 $\dot{R}_{io}$ は次式となる.

$$\dot{R}_{io} = \dot{R}_i + \dot{v}_i \tag{14}$$

なお，$\dot{v}_i$ はドップラーのランダムな観測誤差である.

次の性質は，ドップラーを，目標の位置と速度とで線形近似した結果を示す [13].

（性質 3）速度推定のための初期値を $\dot{x}_0$，$\dot{y}_0$，$\dot{z}_0$ とすると，次式を得る.

$$\Delta \dot{R}_{io} = (\ \alpha_{il} \quad \beta_{il} \quad \gamma_{il}\ )\underline{a}_l + (\ \alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i\ )\underline{a}_d + \dot{v}_i \tag{15}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta\dot{R}_{io} = R_{io} - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \tag{16}$$

$$\underline{a}_d = (\dot{x} - \dot{x}_0, \dot{y} - \dot{y}_0, \dot{z} - \dot{z}_0)^T \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{il} &= \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),\\
\beta_{il} &= \frac{\partial g_i}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),\\
\gamma_{il} &= \frac{\partial g_i}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)
\end{aligned} \tag{18}$$

2.3 線形モデル

式 (6) 及び (15) より，次式の線形観測モデルを得る [13].

$$\underline{b} = A\underline{a} + \underline{v} \tag{19}$$

ここで，

$$\underline{b}_l = (\Delta R_{1o}, \cdots, \Delta R_{no})^T \tag{20}$$

$$\underline{b}_d = (\Delta\dot{R}_{1o}, \cdots, \Delta\dot{R}_{no})^T \tag{21}$$

とし，

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{b}_l^T & \underline{b}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{22}$$

また，式 (9) 及び (18) の線形近似の係数を使用して，

$$\underline{\omega}(i) = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\underline{\delta}(i) = \begin{pmatrix} \underline{\omega}(i) & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\underline{\mu}(i) = \begin{pmatrix} \alpha_{il} & \beta_{il} & \gamma_{il} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\underline{\kappa}(i) = \begin{pmatrix} \underline{\mu}(i) & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

とし，

$$A_l = \begin{pmatrix} \underline{\delta}(1)^T & \cdots & \underline{\delta}(n)^T \end{pmatrix}^T \tag{27}$$

$$A_{ld} = \begin{pmatrix} \underline{\kappa}(1)^T & \cdots & \underline{\kappa}(n)^T \end{pmatrix}^T \tag{28}$$

$$A_d = \begin{pmatrix} \underline{\omega}(1)^T & \cdots & \underline{\omega}(n)^T \end{pmatrix}^T \tag{29}$$

とすれば，$O_{m,n}$ を $m \times n$ の零行列とし，

$$A = \begin{pmatrix} A_l & O_{n,3} \\ A_{ld} & A_d \end{pmatrix} \tag{30}$$

また，

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} \underline{a}_l^T & S & \underline{a}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{31}$$

更に，

$$\underline{v}_l = (v_1, \cdots, v_n)^T \tag{32}$$

$$\underline{v}_d = (\dot{v}_1, \cdots, \dot{v}_n)^T \tag{33}$$

とし，

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{v}_l^T & \underline{v}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{34}$$

2.4 観測雑音共分散行列

ここでは，本論文で使用する TOA での観測雑音の性質について述べる．

i 番目の送受信機間の距離観測雑音の分散を σ_i^2，ドップラー観測雑音の分散を σ_{id}^2，距離とドップラーの観測雑音の相関係数を ρ_i とし，次式を仮定する．なお，$E[\ ]$ は平均，$diag\{a_1, \cdots, a_n\}$ は対角成分を $a_1, \cdots, a_n$ とする対角行列，$\underline{0}$ は零ベクトルを表す．

$$E[\underline{v}] = \underline{0} \tag{35}$$

$$V_l = E\left[\underline{v}_l\, \underline{v}_l^T\right] = diag\left\{\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2\right\} \tag{36}$$

$$V_d = E\left[\underline{v}_d\, \underline{v}_d^T\right] = diag\left\{\sigma_{1d}^2, \cdots, \sigma_{nd}^2\right\} \tag{37}$$

$$V_{ld} = E\left[\underline{v}_l\, \underline{v}_d^T\right] = diag\{\rho_1\sigma_1\sigma_{1d}, \cdots, \rho_n\sigma_n\sigma_{nd}\} \tag{38}$$

$$V = E\left[\underline{v}\,\underline{v}^T\right] = \begin{pmatrix} V_l & V_{ld} \\ V_{ld} & V_d \end{pmatrix} \tag{39}$$

つぎに，本論文で使用する観測雑音に対する前提条件について述べる．

（前提条件 1）$\sigma_i > 0$，$\sigma_{id} > 0$，$|\rho_i| < 1$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする．

次の性質は，観測雑音共分散行列が正値対称行列であることを示す [13]．なお，$D > 0$ は行列 D が正値対称行列，$D \geq 0$ は行列 D が半正値対称行列を表す．

（性質 4）前提条件 1 が成立すると，次式を得る．

$$V > 0 \tag{40}$$

2.5 重み付き最小自乗解

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [10], [11] により，目標の位置及び速度が算出できることを示す [13].

（性質 5）式 (19) において，重み付き最小自乗法による $\underline{a}$ の推定値は，$A^T V^{-1} A$ が正則ならば，次式である．

$$\underline{\hat{a}} = \left(A^T V^{-1} A\right)^{-1} A^T V^{-1} \underline{b} \tag{41}$$

次の性質は，算出結果が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す [13].

（性質 6）式 (41) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}] = \underline{a} \tag{42}$$

$$E\Big[(\underline{\hat{a}} - \underline{a})(\underline{\hat{a}} - \underline{a})^T\Big] = \Big(A^T V^{-1} A\Big)^{-1} \tag{43}$$

つぎに，式 (41) が算出可能となるための本論文で使用する前提条件について述べる．なお，前提条件 2 は，距離観測値のみを使用した TOA で測位が可能となるための必要十分条件である [7]．ここで，式 (23) の $\underline{\omega}(i)$ は，送信機と受信機を結ぶ直線上の単位位置ベクトルである [7]．

（前提条件 2）$\underline{\omega}(i) - \underline{\omega}(1)$ $(i = 2, \cdots, n)$ のうち，いずれか 3 個が 1 次独立とする．なお，$4 \leq n$ とする．

次の性質は，式 (29) を構成する単位ベクトルを使用して，$A^T V^{-1} A$ の逆行列が算出可能かを判定できることを示す [13]．

（性質 7）前提条件 1 及び 2 が成立すると，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A > 0 \tag{44}$$

3. TDOA による目標位置及び速度の推定

ここでは，n − 1 個の電波到達時刻差（距離差）及び n 個のドップラー観測値から，目標位置及び目標速度を推定する方法について述べる．

3.1 距離差の観測モデル

基準局を受信機 1 として，R_{io} $(i = 2, \cdots, n)$ と R_{1o} との差をとれば，式 (5) より，距離のバイアス誤差 S を消去できる．具体的には，式 (6) 及び (8) より，次式を得る [12]．

$$\Delta R_{i1o} = (\ \alpha_i - \alpha_1 \quad \beta_i - \beta_1 \quad \gamma_i - \gamma_1\ )\underline{a}_l + w_i \tag{45}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta R_{i1o} = \Delta R_{io} - \Delta R_{1o} \tag{46}$$

$$w_i = v_i - v_1 \tag{47}$$

3.2 線形モデル

式 (45)〜(47)，(15)，(21)，(23)，(25)，(29) 及び (33) より，次式のような線形観測モデルを得る [14]．

$$\underline{d} = B\underline{c} + \underline{w} \tag{48}$$

ここで，

$$\underline{d}_l = (\Delta R_{2o} - \Delta R_{1o}, \cdots, \Delta R_{no} - \Delta R_{1o})^T \tag{49}$$

とし，

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} \underline{d}_l^T & \underline{b}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{50}$$

また，

$$B_l = \begin{pmatrix} [\underline{\omega}(2) - \underline{\omega}(1)]^T & \cdots & [\underline{\omega}(n) - \underline{\omega}(1)]^T \end{pmatrix}^T \tag{51}$$

$$B_{ld} = \begin{pmatrix} \underline{\mu}(1)^T & \cdots & \underline{\mu}(n)^T \end{pmatrix}^T \tag{52}$$

とし，

$$B = \begin{pmatrix} B_l & O_{n-1,3} \\ B_{ld} & A_d \end{pmatrix} \tag{53}$$

また，

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} \underline{a}_l^T & \underline{a}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{54}$$

更に，

$$\underline{w}_l = (w_2, \cdots, w_n)^T \tag{55}$$

とし，

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} \underline{w}_l^T & \underline{v}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{56}$$

ここで，各要素を 1 とする n 次元ベクトルを

$$\underline{\varepsilon}_n = (\ 1 \quad \cdots \quad 1\ )^T \tag{57}$$

とし，I_n を $n \times n$ の単位行列とし，

$$M = (\ -1 \cdot \underline{\varepsilon}_{n-1} \quad I_{n-1}\ ) \tag{58}$$

とすれば，式 (49) 及び (20)，式 (51) 及び (29)，式 (55)，(47) 及び (32) より，次式を得る．

$$\underline{d}_l = M\underline{b}_l \tag{59}$$

$$B_l = MA_d \tag{60}$$

$$\underline{w}_l = M\underline{v}_l \tag{61}$$

3.3 観測雑音共分散行列

ここでは，TDOA の観測雑音の性質について述べる．式 (56)，(61) 及び (34) より，次式を得る．

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} M & O_{n-1,n} \\ O_{n,n} & I_n \end{pmatrix} \underline{v} \tag{62}$$

つぎに，式 (62) 及び (35) より，次式を得る．

$$E[\underline{w}] = \underline{0} \tag{63}$$

ここで，次式を定義する．

$$W = E\Big[\underline{w}\,\underline{w}^T\Big] = \begin{pmatrix} W_l & W_{ld} \\ W_{ld}^T & V_d \end{pmatrix} \tag{64}$$

なお，式 (61)，(36) 及び (38) より，次式を得る

$$W_l = E\Big[\underline{w}_l \underline{w}_l^T\Big] = MV_l M^T \tag{65}$$

$$W_{ld} = E\Big[\underline{w}_l \underline{v}_d^T\Big] = MV_{ld} \tag{66}$$

したがって，式 (64)〜(66) より，次式を得る．

$$W = \begin{pmatrix} MV_l M^T & MV_{ld} \\ V_{ld} M^T & V_d \end{pmatrix} \tag{67}$$

次の性質は，ドップラーを併用する場合の TDOA の観測雑音共分散行列が正値であることを示す．なお，後述の性質 11 と同様にして証明できるため，ここでは，証明を省略する．

（性質 8）前提条件 1 が成立すると，$W > 0$ である．

3.4 重み付き最小自乗解

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [10], [11] により，目標の位置及び速度が算出できることを示す．なお，次の二つの性質は，距離とドップラーの観測雑音が無相関のときは，文献 [14] で報告済みである．

（性質 9）式 (48) において，重み付き最小自乗法による $\underline{c}$ の推定値は，$B^T W^{-1} B$ が正則ならば，次式である．

$$\hat{\underline{c}} = \Big(B^T W^{-1} B\Big)^{-1} B^T W^{-1} \underline{d} \tag{68}$$

次の性質は，算出結果が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す．

（性質 10）式 (68) は，次の性質を有する．

$$E[\hat{\underline{c}}] = \underline{c} \tag{69}$$

$$P_{tdoa} = E\Big[(\hat{\underline{c}} - \underline{c})(\hat{\underline{c}} - \underline{c})^T\Big] = \Big(B^T W^{-1} B\Big)^{-1} \tag{70}$$

次の性質は，式 (29) を構成する単位ベクトルを使用して，$B^T W^{-1} B$ の逆行列が算出可能かを判定できることを示す．

（性質 11）前提条件 1 及び 2 が成立すると，次式を得る．

$$B^T W^{-1} B > 0 \tag{71}$$

（証明）性質 8 より，次式を得る．

$$B^T W^{-1} B \geq 0 \tag{72}$$

したがって，$B^T W^{-1} B$ が固有値として 0 をもたないことが証明されれば，式 (71) が成立する．ここで，$B^T W^{-1} B$ が固有値として 0 をもつとする．すると，次式を満たす 3 次元ベクトル $\underline{g}$ と $\underline{h}$ が存在する．

$$B^T W^{-1} B \underline{y} = \underline{0} \tag{73}$$

$$\underline{y} = \Big(\, \underline{g}^T \quad \underline{h}^T \,\Big)^T \neq \underline{0} \tag{74}$$

式 (73) を使用して，内積を計算すれば，次式を得る．

$$\Big(B^T W^{-1} B \underline{y}, \underline{y}\Big) = 0 \tag{75}$$

式 (75) より，次式を得る．

$$\Big(W^{-1} B \underline{y}, B \underline{y}\Big) = 0 \tag{76}$$

式 (76) に，$W^{-1} > 0$ を使用し，次式を得る．

$$B \underline{y} = \underline{0} \tag{77}$$

式 (77) に，式 (53) 及び (74) を使用し，次式を得る．

$$B_l \underline{g} = \underline{0} \tag{78}$$

$$B_{ld} \underline{g} + A_d \underline{h} = \underline{0} \tag{79}$$

ここで，式 (51) に前提条件 2 を使用して B_l の階数は 3 であるので，式 (78) より，次式を得る．

$$\underline{g} = \underline{0} \tag{80}$$

式 (79) 及び (80) より，次式を得る．

$$A_d \underline{h} = \underline{0} \tag{81}$$

ここで，文献 [14] の性質 10 を使用すれば，$\underline{\omega}(i)$，$\underline{\omega}(1)$ $(i = 2, \cdots, n)$ のうちいずれか 3 個は 1 次独立である．この結果，式 (29) の A_d の階数は 3 であるので，式 (81) より次式を得る．

$$\underline{h} = \underline{0} \tag{82}$$

式 (74) は，式 (80) 及び (82) と矛盾しており，結論を得る．（証明終）

4. TOA と TDOA の推定誤差共分散行列

ここでは，TOA と TDOA の位置，速度の推定誤差共分散行列について述べる．なお，距離の観測雑音とドップラーの観測雑音が無相関と仮定すれば，式 (38) は零行列となるため，本論文の証明は著しく簡素化される．しかし，適用範囲を広げるため，本論文では，無相関の仮定は行わない．

4.1 TOA における位置，速度のみの推定

式 (41) には，距離バイアス誤差の推定値が含まれている．一方，TDOA では，距離バイアス誤差は推定しない．このため，ここでは，TDOA との比較のため，TOA における位置，速度の推定値について述べる．

ここで，

$$N = \begin{pmatrix} I_3 & O_{3,1} \end{pmatrix} \tag{83}$$

とすれば，式 (31) に，式 (8) 及び (17) を使用し，次式を得る．

$$\underline{a}_l = \begin{pmatrix} N & O_{3,3} \end{pmatrix} \underline{a} \tag{84}$$

$$\underline{a}_d = \begin{pmatrix} O_{3,4} & I_3 \end{pmatrix} \underline{a} \tag{85}$$

この結果，式 (84) 及び (85) より，以下の TOA における位置と速度の推定値がそれぞれ得られる．

$$\hat{\underline{a}}_l = \begin{pmatrix} N & O_{3,3} \end{pmatrix} \hat{\underline{a}} \tag{86}$$

$$\hat{\underline{a}}_d = \begin{pmatrix} O_{3,4} & I_3 \end{pmatrix} \hat{\underline{a}} \tag{87}$$

また，式 (86) 及び (87) より，距離バイアス誤差を含まない，位置，速度のみの推定結果は，次式となる

$$\hat{\underline{a}}_K = \begin{pmatrix} N & O_{3,3} \\ O_{3,4} & I_3 \end{pmatrix} \hat{\underline{a}} \tag{88}$$

なお，目標の位置，速度の真値は，式 (84) 及び (85) より，式 (54) を使用し，次式となる．

$$\underline{c} = \begin{pmatrix} N & O_{3,3} \\ O_{3,4} & I_3 \end{pmatrix} \underline{a} \tag{89}$$

4.2 TOA の位置，速度の推定誤差共分散行列

式 (88) 及び (89) より，式 (43) を使用し，TOA の位置，速度の推定誤差共分散行列は，次式となる．

$$P_{toa} = E\left[(\hat{\underline{a}}_K - \underline{c})(\hat{\underline{a}}_K - \underline{c})^T\right] = \begin{pmatrix} N & O_{3,3} \\ O_{3,4} & I_3 \end{pmatrix} \left(A^T V^{-1} A\right)^{-1} \begin{pmatrix} N^T & O_{4,3} \\ O_{3,3} & I_3 \end{pmatrix} \tag{90}$$

TDOA と TOA の推定精度を比較するには，式 (70) と (90) とを，比較すればよい．このため，まず，式 (90) の性質を明らかにする．

（補題 1）前提条件 1 が成立すると，次式を得る．

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{pmatrix} \tag{91}$$

ここで，

$$H = V_l - V_{ld} V_d^{-1} V_{ld} \tag{92}$$

とすれば

$$V_{11} = H^{-1} \tag{93}$$

$$V_{12} = -H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} \tag{94}$$

$$V_{22} = V_d^{-1} + V_d^{-1} V_{ld} H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} \tag{95}$$

である．なお，式 (92)〜(95) は，対角行列である．

（証明）式 (40) より，付録の定理 1 を使用し，式 (92)〜(95) を得る．式 (36)〜(38) は対角行列の仮定より，式 (92)〜(95) も対角行列である．（証明終）

次の補題は，TOA の推定誤差共分散行列の逆行列の算出式を示す（式 (43) 参照）．

（補題 2）前提条件 1 が成立すると，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} \tag{96}$$

ここで，次式を定義する．

$$\begin{aligned} A_{11} = {} & A_l^T H^{-1} A_l - A_{ld}^T H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_l \\ & - A_l^T H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_{ld} + A_{ld}^T V_d^{-1} A_{ld} \\ & + A_{ld}^T V_d^{-1} V_{ld} H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_{ld} \end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned} A_{12} = {} & -A_l^T H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_d + A_{ld}^T V_d^{-1} A_d \\ & + A_{ld}^T V_d^{-1} V_{ld} H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_d \end{aligned} \tag{98}$$

$$A_{22} = A_d^T V_d^{-1} A_d + A_d^T V_d^{-1} V_{ld} H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_d \tag{99}$$

なお，A_{11} は 4×4，A_{12} は 4×3，A_{22} は 3×3 の行列である．

（証明）式 (30) 及び補題 1 より，結論を得る．（証明終）

次の補題は，TOA の位置，速度の推定誤差共分散行列の逆行列の算出式を示す．

（補題 3）前提条件 1 及び 2 が成立すると，次式を得る．

$$P_{toa}^{-1} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix} \tag{100}$$

ここで，次式を定義する．

$$S_{11} = \left(N A_{11}^{-1} N^T\right)^{-1} \tag{101}$$

$$S_{12} = \left(N A_{11}^{-1} N^T\right)^{-1} N A_{11}^{-1} A_{12} \tag{102}$$

$$S_{22} = A_{22} + A_{12}^T \left[A_{11}^{-1} N^T \left(N A_{11}^{-1} N^T \right)^{-1} N A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} \right] A_{12} \tag{103}$$

（証明）まず，K_{11} は 4×4，K_{12} は 4×3，K_{22} は 3×3 の行列として，次式を定義する．

$$\left(A^T V^{-1} A \right)^{-1} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{pmatrix} \tag{104}$$

すると，式 (90) より，次式を得る．

$$P_{toa} = \begin{pmatrix} N K_{11} N^T & N K_{12} \\ K_{12}^T N^T & K_{22} \end{pmatrix} \tag{105}$$

ここで，

$$U = N \left(K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{12}^T \right) N^T \tag{106}$$

とすると，式 (100) 及び (105) に，付録の定理 1 を使用して，次式を得る．

$$S_{11} = U^{-1} \tag{107}$$

$$S_{12} = -U^{-1} N K_{12} K_{22}^{-1} \tag{108}$$

$$S_{22} = K_{22}^{-1} + K_{22}^{-1} K_{12}^T N^T U^{-1} N K_{12} K_{22}^{-1} \tag{109}$$

また，式 (104) に付録の定理 1 を使用すれば，式 (96) より，次式を得る．

$$A_{11} = \left[K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{12}^T \right]^{-1} \tag{110}$$

$$A_{12} = -\left[K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{12}^T \right]^{-1} K_{12} K_{22}^{-1} \tag{111}$$

$$A_{22} = K_{22}^{-1} + K_{22}^{-1} K_{12}^T \left[K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{12}^T \right]^{-1} K_{12} K_{22}^{-1} \tag{112}$$

式 (106) 及び (110) より，次式を得る．

$$U = N A_{11}^{-1} N^T \tag{113}$$

式 (107) 及び (113) より，式 (101) を得る．
式 (111) 及び (110) より，次式を得る．

$$K_{12} K_{22}^{-1} = -A_{11}^{-1} A_{12} \tag{114}$$

式 (108) に，式 (114) を使用し，次式を得る．

$$S_{12} = U^{-1} N A_{11}^{-1} A_{12} \tag{115}$$

式 (115) に，式 (113) を使用し，式 (102) を得る．
ところで，式 (109) 及び (112) より，次式を得る．

$$S_{22} - A_{22} = K_{22}^{-1} K_{12}^T \left\{ N^T U^{-1} N - \left[K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{12}^T \right]^{-1} \right\} K_{12} K_{22}^{-1} \tag{116}$$

式 (116) に，式 (114)，(113) 及び (110) を使用し，式 (103) を得る．（証明終）

4.3 TDOA の位置，速度の推定誤差共分散行列

次の補題は，式 (70) の値の算出に使用する．
（補題 4）前提条件 1 が成立すると，次式を得る．

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{pmatrix} \tag{117}$$

ここで，次式を定義する．

$$W_{11} = \left[M H M^T \right]^{-1} \tag{118}$$

$$W_{12} = -\left[M H M^T \right]^{-1} M V_{ld} V_d^{-1} \tag{119}$$

$$W_{22} = V_d^{-1} + V_d^{-1} V_{ld} M^T \left[M H M^T \right]^{-1} M V_{ld} V_d^{-1} \tag{120}$$

（証明）式 (67) に，付録の定理 1 及び式 (117) を使用して，次式を得る．

$$W_{11} = \left[M V_l M^T - M V_{ld} V_d^{-1} V_{ld} M^T \right]^{-1} \tag{121}$$

$$W_{12} = -W_{11} M V_{ld} V_d^{-1} \tag{122}$$

$$W_{22} = V_d^{-1} + V_d^{-1} V_{ld} M^T W_{11} M V_{ld} V_d^{-1} \tag{123}$$

式 (121) 及び (92) より，式 (118) を得る．
式 (122) 及び (118) より，式 (119) を得る．
式 (123) 及び (118) より，式 (120) を得る．
（証明終）

次の補題は，TDOA の位置，速度の推定誤差共分散行列の逆行列の算出式を示す．
（補題 5）前提条件 1 及び 2 が成立すると，次式を得る．

$$P_{tdoa}^{-1} = B^T W^{-1} B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{pmatrix} \tag{124}$$

ここで，

$$G = M^T \left(M H M^T \right)^{-1} M \tag{125}$$

とし，次式を定義する．

$$B_{11} = N A_l^T G A_l N^T - N A_{ld}^T V_d^{-1} V_{ld} G A_l N^T$$

$$-NA_l^T GV_{ld}V_d^{-1}A_{ld}N^T$$
$$+NA_{ld}^T V_d^{-1}A_{ld}N^T + NA_{ld}^T V_d^{-1}V_{ld}GV_{ld}V_d^{-1}A_{ld}N^T \tag{126}$$

$$B_{12} = -NA_l^T GV_{ld}V_d^{-1}A_d + NA_{ld}^T V_d^{-1}A_d$$
$$+ NA_{ld}^T V_d^{-1}V_{ld}GV_{ld}V_d^{-1}A_d \tag{127}$$

$$B_{22} = A_d^T V_d^{-1}A_d + A_d^T V_d^{-1}V_{ld}GV_{ld}V_d^{-1}A_d \tag{128}$$

（証明）式 (25) 及び (26) より，式 (83) を使用し，次式を得る．

$$\underline{\mu}(i) = \underline{\kappa}(i)N^T \tag{129}$$

式 (52) 及び (28) より，式 (129) を使用し，次式を得る．

$$B_{ld} = A_{ld}N^T \tag{130}$$

式 (27) 及び (29) より，式 (130) と同様にして，次式を得る．

$$A_d = A_l N^T \tag{131}$$

式 (60) 及び (131) より，次式を得る．

$$B_l = MA_l N^T \tag{132}$$

式 (53) に，式 (132) 及び (130) を使用し，次式を得る．

$$B = \begin{pmatrix} MA_l N^T & O_{n-1,3} \\ A_{ld}N^T & A_d \end{pmatrix} \tag{133}$$

式 (124) に，式 (133) 及び (117) を使用し，次式を得る．

$$B_{11} = \left[NA_l^T M^T W_{11} + NA_{ld}^T W_{12}^T\right] MA_l N^T$$
$$+ \left[NA_l^T M^T W_{12} + NA_{ld}^T W_{22}\right] A_{ld}N^T \tag{134}$$

$$B_{12} = \left[NA_l^T M^T W_{12} + NA_{ld}^T W_{22}\right] A_d \tag{135}$$

$$B_{22} = A_d^T W_{22} A_d \tag{136}$$

式 (134)〜(136) に，式 (118)〜(120) を使用し，結論を得る． （証明終）

5. TOA と TDOA との推定精度の同一性

ここでは，TDOA と時計オフセット誤差を未知数とする TOA の位置，速度推定精度の比較結果を示す．

5.1 同一性導出に必要な補題

式 (125) における H は，補題 1 より，正則な対角行列である．次の補題は，H が $n \times n$ の正則な対角行列ならば常に成立する．この補題は，文献 [12] の性質 11 と同様にして証明できる．なお，次の 3 個の補題は，TOA と TDOA との推定精度の同一性の証明に使用する．

（補題 6）式 (125) において，次式が成立する．

$$G = H^{-1} - \left(1/\underline{\varepsilon}_n^T H^{-1}\underline{\varepsilon}_n\right) \cdot H^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^T H^{-1} \tag{137}$$

（補題 7）式 (100) において，次式が成立する．

$$S_{11} = NA_{11}N^T - \left(1/\underline{e}_4^T A_{11}\underline{e}_4\right)$$
$$\cdot [NA_{11}\underline{e}_4][NA_{11}\underline{e}_4]^T \tag{138}$$

$$S_{12} = \begin{pmatrix} I_3 & -\left(1/\underline{e}_4^T A_{11}\underline{e}_4\right) \cdot NA_{11}\underline{e}_4 \end{pmatrix} A_{12} \tag{139}$$

$$S_{22} = A_{22} - A_{12}^T \begin{pmatrix} O_{3,3} & O_{3,1} \\ O_{1,3} & 1/\underline{e}_4^T A_{11}\underline{e}_4 \end{pmatrix} A_{12} \tag{140}$$

ここで，次式を定義する．

$$\underline{e}_4 = (\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\ )^T \tag{141}$$

（証明）まず，Y_{11} は 3×3，Y_{12} は 3×1，y は実数とし，次式を定義する．

$$A_{11} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & y \end{pmatrix} \tag{142}$$

すると，式 (142) に，付録の定理 1 及び式 (83) を使用し，次式を得る．

$$NA_{11}^{-1}N^T = \left[Y_{11} - (1/y) \cdot Y_{12}Y_{12}^T\right]^{-1} \tag{143}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} NA_{11}^{-1}N^T & -(1/y) \cdot NA_{11}^{-1}N^T Y_{12} \\ -\dfrac{1}{y}Y_{12}^T NA_{11}^{-1}N^T & \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2}Y_{12}^T NA_{11}^{-1}N^T Y_{12} \end{pmatrix} \tag{144}$$

$$NA_{11}^{-1} = (\ NA_{11}^{-1}N^T \quad -(1/y) \cdot NA_{11}^{-1}N^T Y_{12}\ ) \tag{145}$$

$$NA_{11} = (\ Y_{11} \quad Y_{12}\ ) \tag{146}$$

$$NA_{11}N^T = Y_{11} \tag{147}$$

また，式 (142) 及び (141) より，次式を得る．

$$y = \underline{e}_4^T A_{11}\underline{e}_4 \tag{148}$$

式 (101) に，式 (143) 及び (147) を使用し，次式を得る．

$$S_{11} = NA_{11}N^T - (1/y) \cdot Y_{12}Y_{12}^T \tag{149}$$

式 (146) 及び (141) より，次式を得る．

$$Y_{12} = NA_{11}\underline{e}_4 \tag{150}$$

式 (149) に，式 (148) 及び (150) を使用し，式 (138) を得る．

式 (145) より，次式を得る．

$$\left[NA_{11}^{-1}N^T\right]^{-1} NA_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} I_3 & -(1/y) \cdot Y_{12} \end{pmatrix} \tag{151}$$

式 (102) に式 (151) を使用したのち，式 (148) 及び式 (150) を使用し，式 (139) を得る．

式 (145) 及び (151) より，次式を得る．

$$A_{11}^{-1}N^T\left[NA_{11}^{-1}N^T\right]^{-1}NA_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} NA_{11}^{-1}N^T & -(1/y)\cdot NA_{11}^{-1}N^TY_{12} \\ -(1/y)\cdot Y_{12}^TNA_{11}^{-1}N^T & (1/y^2)\cdot Y_{12}^TNA_{11}^{-1}N^TY_{12} \end{pmatrix} \tag{152}$$

式 (103) に式 (152) 及び (144) を使用したのち，式 (148) を使用し，式 (140) を得る．（証明終）

（補題 8）次式が成立する．

$$A_l\underline{e}_4 = \underline{\varepsilon}_n \tag{153}$$

$$\underline{e}_4^TA_l^T = \underline{\varepsilon}_n^T \tag{154}$$

$$A_{ld}\underline{e}_4 = 0 \cdot \underline{\varepsilon}_n \tag{155}$$

$$\underline{e}_4^TA_{ld}^T = 0 \cdot \underline{\varepsilon}_n^T \tag{156}$$

（証明）式 (27)，(24) 及び (141) より，式 (57) を使用し，式 (153) を得る．式 (153) より，式 (154) を得る．

式 (28)，(26) 及び (141) より，式 (57) を使用し，式 (155) を得る．式 (155) より，式 (156) を得る．（証明終）

5.2 同 一 性

次の性質は，式 (70) 及び (90) より，TDOA と時計オフセット誤差を未知数とする TOA の位置，速度推定精度は同一であることを示す．

（性質 12）前提条件 1 及び 2 が成立すると，次式を得る．

$$P_{toa} = P_{tdoa} \tag{157}$$

（証明）式 (100) 及び (124) より，次の 3 式を示せば，結論を得る．

$$B_{11} = S_{11} \tag{158}$$

$$B_{12} = S_{12} \tag{159}$$

$$B_{22} = S_{22} \tag{160}$$

式 (97) に，式 (153) 及び (155) を使用し，次式を得る．

$$A_{11}\underline{e}_4 = A_l^TH^{-1}\underline{\varepsilon}_n - A_{ld}^TH^{-1}V_{ld}V_d^{-1}\underline{\varepsilon}_n \tag{161}$$

式 (161) に，式 (154) 及び (156) を使用し，次式を得る．

$$\underline{e}_4^TA_{11}\underline{e}_4 = \underline{\varepsilon}_n^TH^{-1}\underline{\varepsilon}_n \tag{162}$$

式 (138) に，式 (161) 及び (162) を使用し，次式を得る．

$$\begin{aligned} S_{11} &= NA_{11}N^T \\ &- \frac{1}{\underline{\varepsilon}_n^TH^{-1}\underline{\varepsilon}_n}N\left[A_l^TH^{-1} - A_{ld}^TH^{-1}V_{ld}V_d^{-1}\right] \\ &\times \underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^T\left[H^{-1}A_l - V_d^{-1}V_{ld}H^{-1}A_{ld}\right]N^T \end{aligned} \tag{163}$$

一方，式 (126) に，式 (137) を使用したのち，式 (97) 及び H^{-1}，V_{ld}，V_d^{-1} は対角行列（互いに可換）を使用すれば，式 (163) より，式 (158) を得る．

次に，式 (139) に，式 (83) 及び (162) を使用し，次式を得る．

$$\begin{aligned} S_{12} &= NA_{12} \\ &+ \begin{pmatrix} 0I_3 & -\left(1/\underline{\varepsilon}_n^TH^{-1}\underline{\varepsilon}_n\right) \cdot NA_{11}\underline{e}_4 \end{pmatrix} A_{11} \end{aligned} \tag{164}$$

式 (164) に，式 (141) を使用し，次式を得る．

$$S_{12} = NA_{12} - \left(1/\underline{\varepsilon}_n^TH^{-1}\underline{\varepsilon}_n\right) \cdot NA_{11}\underline{e}_4\underline{e}_4^TA_{12} \tag{165}$$

式 (98) に，式 (154) 及び (156) を使用し，次式を得る．

$$\underline{e}_4^TA_{12} = -\underline{\varepsilon}_n^TH^{-1}V_{ld}V_d^{-1}A_d \tag{166}$$

式 (165) に，式 (161) 及び (166) を使用し，次式を得る．

$$S_{12} = NA_{12} + \left(1/\underline{\varepsilon}_n^TH^{-1}\underline{\varepsilon}_n\right) \cdot N \times$$

$$\left[A_l^T H^{-1} - A_{ld}^T H^{-1} V_{ld} V_d^{-1}\right] \underline{\varepsilon}_n \underline{\varepsilon}_n^T \left[H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_d\right] \tag{167}$$

一方，式 (127) に，式 (137) を使用したのち，式 (98) 及び H^{-1}，V_{ld}，V_d^{-1} は対角行列を使用すれば，式 (167) より，式 (159) を得る．

また，式 (140) より，式 (141) を使用し，次式を得る．

$$S_{22} = A_{22} - \left(1/\underline{e}_4^T A_{11} \underline{e}_4\right) \cdot A_{12}^T \underline{e}_4 \underline{e}_4^T A_{12} \tag{168}$$

式 (168) に，式 (166) 及び (162) を使用し，次式を得る．

$$S_{22} = A_{22} - \left(1/\underline{\varepsilon}_n^T H^{-1} \underline{\varepsilon}_n\right) \cdot A_d^T V_d^{-1} V_{ld} H^{-1} \underline{\varepsilon}_n \underline{\varepsilon}_n^T H^{-1} V_{ld} V_d^{-1} A_d \tag{169}$$

一方，式 (128) に，式 (137) を使用したのち，式 (99) を使用すれば，式 (169) より，式 (160) を得る．

（証明終）

性質 12 は，TOA と TDOA とで，位置及び速度誤差の統計的性質が同一であることを示す．更に，次の性質は，式 (88) 及び (68) より，両者の位置及び速度の推定結果も同一であることを示す．なお，証明は煩雑なため省略する．

（性質 13）前提条件 1 及び 2 が成立すると，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_K = \underline{\hat{c}} \tag{170}$$

6. 考　　　察

6.1 推定値の次元

時計オフセット誤差を未知数とする TOA で，ドップラーを併用して三次元空間の位置と速度を推定する場合，式 (31) の七次元ベクトルを推定する必要がある．

一方，TDOA で，三次元空間の位置と速度を推定する場合，式 (54) の六次元ベクトルを推定することになる．したがって，リアルタイム性を要求される実システムの構築には，TDOA が，TOA よりも有利である．

6.2 観測雑音共分散行列

ドップラーを併用する TOA の観測雑音共分散行列は，式 (39) で表される．式 (39) を構成する式 (36)～(38) の三個の行列は，異なる送受信機間の観測雑音は無相関の仮定より，いずれも対角行列である．したがって，推定性能の理論解析が容易である．

一方，ドップラーを併用する TDOA の観測雑音共分散行列は，式 (64) で表される．式 (64) を構成する式 (65) 及び (66) の行列は，異なる送受信機間の観測雑音は無相関でも，基準局の受信時刻の観測雑音が全ての距離差の観測値に影響するため，対角行列にはならない．したがって，推定性能の理論解析が困難である．

なお，TDOA のように送信時刻が付与されない場合でも，送信時刻を仮に与え，時計オフセット誤差を未知数とすれば，TOA が使用可能である．

6.3 数　値　例

ここでは，移動物体が送信機を有し，3 個の受信局は固定位置にある場合の，TOA 及び TDOA の位置と速度の推定誤差共分散行列の計算例を示す．

簡単のため，二次元の xy 平面で考える．また，受信機時計誤差の距離相当の観測雑音の分散 σ_i^2 $(i = 1, 2, 3)$ は 0.01，ドップラーの観測雑音の分散 σ_{id}^2 $(i = 1, 2, 3)$ は a^2，距離とドップラーは無相関，測位計算のための初期値は真値とする．また，距離バイアス誤差を未知数とする．

ここで，送信機を有する目標の位置 $\underline{L}$ 及び受信機 $\underline{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ の位置を次式とする．

$$\underline{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{171}$$

また，それらの速度ベクトルを，次式とする．

$$\underline{\dot{B}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{\dot{B}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{\dot{B}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{\dot{L}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{172}$$

（1）　TOA

この場合，

$$A_l = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{173}$$

$$A_{ld} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，式 (30) に対応し，次式を得る．

$$A = \begin{pmatrix} A_l & O_{3,2} \\ A_{ld} & A_d \end{pmatrix} \tag{174}$$

また，式 (39) に対応し，次式を得る．

$$V = \begin{pmatrix} 0.01I_3 & O_{3,3} \\ O_{3,3} & a^2 I_3 \end{pmatrix} \tag{175}$$

すると，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & A_{22} \end{pmatrix} \tag{176}$$

ここで，次式を定義する

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 150+\frac{9}{8a^2} & 50-\frac{1}{8a^2} & 100\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 50-\frac{1}{8a^2} & 150+\frac{9}{8a^2} & 100\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 100\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 100\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 300 \end{pmatrix}, \tag{177}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2} & \frac{5}{4a^2} \\ -\frac{1}{4a^2} & -\frac{1}{4a^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{3}{2a^2} \end{pmatrix}$$

（2） TDOA

この場合，

$$B_l = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{178}$$

$$B_{ld} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，式 (53) に対応し，次式を得る．

$$B = \begin{pmatrix} B_l & O_{2,2} \\ B_{ld} & A_d \end{pmatrix} \tag{179}$$

また，

$$W_l = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{180}$$

として，式 (64) に対応し，次式を得る．

$$W = \begin{pmatrix} W_l & O_{2,3} \\ O_{3,2} & a^2 I_3 \end{pmatrix} \tag{181}$$

すると，次式を得る．

$$B^T W^{-1} B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^T & B_{22} \end{pmatrix} \tag{182}$$

ここで，次式を定義する．

$$B_{11} = \begin{pmatrix} \frac{100}{3}\left(3-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\frac{9}{8a^2} & -\frac{200}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{8a^2} \\ -\frac{200}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{8a^2} & \frac{100}{3}\left(3-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{8a^2} \end{pmatrix} \tag{183}$$

$$B_{12} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4a^2} & \frac{5}{4a^2} \\ -\frac{1}{4a^2} & \frac{1}{4a^2} \end{pmatrix}, \ B_{22} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2a^2} & \frac{1}{2a^2} \\ \frac{1}{2a^2} & \frac{3}{2a^2} \end{pmatrix}$$

（3） 位置推定誤差共分散行列

TOA，TDOA とも位置推定誤差共分散行列は次の値である．

$$P_L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{11} \end{pmatrix} \tag{184}$$

ここで，

$$q = \frac{1}{200\left(2400a^2\sqrt{2} - 3200a^2 + 3\sqrt{2}\right)} \tag{185}$$

として，次式を定義する．

$$l_{11} = \left(4800a^2\sqrt{2} - 3200a^2 + 3\sqrt{2}\right)q, \tag{186}$$

$$l_{12} = \left(3200a^2 - 3\sqrt{2}\right)q$$

（4） 速度推定誤差共分散行列

TOA，TDOA とも速度推定誤差共分散行列は次の

値である．

$$P_V = \begin{pmatrix} \mathring{\imath}_{11} & \mathring{\imath}_{12} \\ \mathring{\imath}_{12} & \mathring{\imath}_{22} \end{pmatrix} \quad (187)$$

ここで，式 (185) を使用して，次式を定義する．

$$\mathring{\imath}_{11} = 600a^2\left(600a^2\sqrt{2} - 800a^2 + 4\sqrt{2}\right)q, \quad (188)$$

$$\mathring{\imath}_{12} = -200a^2\left(600a^2\sqrt{2} - 800a^2 + 3\sqrt{2}\right)q,$$

$$\mathring{\imath}_{22} = \left\{200a^2\left(1800a^2\sqrt{2} - 2400a^2 + 21\sqrt{2} - 16\right) + 3\sqrt{2}\right\}q$$

7. むすび

本論文では，テイラー級数推定法において，ドップラーを観測値として併用する場合でも，TDOA は，時計オフセット誤差を未知数とする TOA と，推定精度は同一であることを解析的に示した．この結果，例えば，時計オフセット誤差が不要なため六次元ベクトルの推定となる TDOA で実システムを構築したとしても，誤差解析は観測雑音共分散行列がシンプルな TOA で行ってもよいことが分かった．

文献

[1] 佐田達典，GPS 測量技術，オーム社，東京，2003.

[2] 安田明生，“GPS の現状と展望，” 信学誌，vol.82, no.12, pp.1207–1215, Dec. 1999.

[3] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[4] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[5] 福島荘之介，“理解するための GPS 測位計算プログラム入門（その 3）測位計算のはなし，” 航空無線，no.36, 夏期，2003.

[6] 坂井丈泰，GPS 技術入門，東京電機大学出版局，東京，2003.

[7] 小菅義夫，“特異値による TOA 測位精度の解析，” 信学論（B），vol.J96-B, no.3, pp.366–372, March 2014.

[8] 宮崎裕己，他，“広域マルチラテレーションの評価試験，” 第 11 回電子航法研究所発表会講演概要，東京，June 2011.

[9] EUROCAE, “Technical Specification for Wide Area Multilateration (WAM) System,” Version 1.0, ED-142, Oct. 2009.

[10] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[11] 中川　徹，小柳義夫，最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，東京，1982.

[12] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，“TOA と TDOA 測位の同一性，” 信学論（B），vol.J98-B, no.2, pp.223–233, Feb. 2015.

[13] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，秋田　学，稲葉敬之，“距離とドップラーを観測値とするテイラー級数推定法を用いた三次元の位置及び速度推定の解析，” 信学論（B），vol.J98-B, no.8, pp.830–839, Aug. 2015.

[14] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，秋田　学，稲葉敬之，“ドップラー観測値を併用する TDOA の位置・速度推定，” 信学論（B），vol.J99-B, no.3, pp.230–240, March 2016.

付　録

（定理 1）D は $(m+n)\times(m+n)$，D_{11} は $m\times m$，D_{22} は $n\times n$ の行列で，

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{A·1})$$

とする．すると，D_{11}，D_{22} 及び $H = D_{11} - D_{12}D_{22}^{-1}D_{12}^T$ は，正値対称行列で，次式が成立する [4]．

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} H^{-1} & -H^{-1}D_{12}D_{22}^{-1} \\ -D_{22}^{-1}D_{12}^T H^{-1} & D_{22}^{-1} + D_{22}^{-1}D_{12}^T H^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A·2})$$

（平成 28 年 6 月 2 日受付，7 月 24 日再受付，9 月 2 日早期公開）

小菅　義夫　（正員）

昭 47 早大・理工・数学卒．昭 49 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平 16 長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員．電通大特任教授．工博．IEEE シニア会員．

古賀　禎　（正員）

平 5 年東京理科大・理工・電気卒．平 7 年同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入所．平 13 年カリフォルニア大デービス校客員研究員．工博．二次監視レーダ，空港面監視システムの研究に従事．

宮崎　裕己　（正員）

平 3 信州大・工卒．平 5 同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入省．以来，二次監視レーダやマルチラテレーションに関する研究開発に従事．電気学会会員．

秋田　　学　（正員）

平 17 大阪大・工・電子情報エネルギー工卒，平 20 同大大学院博士前期課程了．平 23 同大大学院博士後期課程了．平 24 ニューメキシコ工科大学博士研究員．平 25 電気通信大学大学院情報理工学研究科助教．

稲葉　敬之　（正員）

昭 56 東工大・理・物理卒，昭 58 同大大学院修士課程了．同年，三菱電機（株）入社．平 20 年 4 月より電通大教授．工博．レーダ信号処理，超電導磁気センサ信号処理，アダプティブアレー信号処理，車載レーダの研究開発等に従事．IEEE シニア会員．