論　文

テイラー級数推定法を用いたTSOAによる測位法の性能

小菅　義夫[†,††]　古賀　禎[†]　宮崎　裕己[†]　秋田　学[††]
稲葉　敬之[††]

Performance of Time Sum of Arrival Based Location System by Taylor-Series Estimation

Yoshio KOSUGE[†,††], Tadashi KOGA[†], Hiromi MIYAZAKI[†], Manabu AKITA[††], and Takayuki INABA[††]

あらまし　送信局よりパルスを送信して得た移動体からの反射電波を，異なる位置にある複数の受信局で受信して，移動体の位置を推定（測位と呼ぶ）する方法について述べる．なお，送受信局の位置は既知で，時刻整合は取れているとする．TSOA では，パルス送信時刻（Tt）と受信時刻（Tr）より，送信局と移動体間の距離と，移動体と受信局間との距離の和を算出し測位する．この方法では，Tt の検出誤差が，全ての距離和に影響する．TDOA では，基準局以外の受信局と基準局の受信時刻差より距離差を算出し測位する．この方法では，基準局の Tr の検出誤差が，全ての距離差に影響する．しかし，Tt の検出誤差は，距離差には影響しない．本論文では，Taylor 級数推定法において，TDOA で測位可能ならば，Tt の検出性能が劣悪でも，送受信局の配置によらず，TSOA は，TDOA 以上の性能が，実現できることを解析的に示す．更に，TSOA において，受信局が増加した場合，推定精度に劣化はないことを明らかにした．更にまた，推定が可能かの判定を含めた推定精度の指標，並びに推定誤差の上界及び下界の算出式を示した．

キーワード　TSOA，TDOA，測位，特異値，誤差解析

1. まえがき

移動体（目標と呼ぶ）が送信機あるいは受信機を有している場合の目標の三次元空間の位置推定（測位と呼ぶ）方法として，TOA（Time of Arrival）が報告されている [1]～[7]．TOA では，送受信局間の距離を同時に複数観測し測位する．この代表例は，GPS（Global Positioning System）である [1]～[7].

なお，距離は，未知数である三次元の位置の非線形関数である．このため，TOA では，距離を線形近似して得たモデルに，重み付き最小自乗法を使用して解を算出する Taylor 級数推定法が使用されている [1]～[8].

† 国立研究開発法人電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaiji-higashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan
†† 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Information and Engineering, The University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan
DOI: 10.14923/transcomj.2016JBP3014

しかし，TOA では，移動体と送受信局の幾何学的な位置関係により，測位精度が大きく変化する．測位計算が発散する送受信局の配置すら存在する [1], [4], [5].

本論文は，送信局よりパルスを送信して得た目標からの反射電波を，異なる位置にある複数の受信局で受信して，測位する方法について述べる．なお，送受信局の位置は既知で，時刻整合は取れているとする．

TSOA（Time Sum of Arrival）では，パルス送信時刻（Tt）と受信時刻（Tr）より，送信局と移動体間の距離と，移動体と受信局間との距離の和を算出し測位する [9]～[12]．この方法では，Tt の検出誤差が，全ての距離和に影響する．

また，TDOA（Time Difference of Arrival）では，基準局と異なる位置に配置された受信局で受信した移動体からの電波の受信時刻と，基準局での受信時刻の差である電波到達時刻差を使用して，移動体の位置を推定する [13]．この方法では，基準局の Tr の検出誤差が，全ての距離差に影響する．しかし，Tt の検出誤差は，距離差には影響しないとの長所を有する．

なお，TOA 及び TDOA には多数の報告があるが，

TSOA は極めて少ないのが現状である [9]〜[12]．ここで，文献 [11], [12] は，数学的に統一したフォーマットで TOA，TDOA 及び TSOA を記述し，マルチパス波の影響軽減について報告している．また，文献 [9], [10] は，シミュレーションにより，TSOA の性能を評価している．

特に，文献 [9] は，TSOA と TDOA のシミュレーションによる測位性能の比較結果を詳報している．なお，受信局が 4〜7 局で，時刻検出誤差の分散が同一の場合の二次元平面の測位精度が比較されている．当該報告は，TSOA は TDOA よりすぐれているとしている [9]．また，受信局が多い方が高性能であることが示されている [9]．しかし，この結果が，送受信局間で時刻検出誤差の分散が異なる場合等にも成立するかどうかは不明である．

ここで，二次元平面での測位では，距離和一定の軌跡は，送信局と受信局の位置を焦点とするだ円である．一方，距離差一定の軌跡は，二つの受信局の位置を焦点とする双曲線である．このため，TSOA 測位はだ円の交点，TDOA 測位は双曲線の交点を推定することと等価となる．したがって，両者は全く異なった測位法に見える．この結果，両者の性能を理論的に比較するのが困難であったと考えられる．

なお，TDOA は，TSOA より観測値が 1 個少ない．この改良として，まず一つの受信局で距離和を算出し，つぎに，この距離和と TDOA の併用により測位する方法（TDOA 併用と呼ぶ）が考えられる．既存の TDOA 測位システムに送信時刻を付加して性能改善を図る場合，最も変更の少ない方法として容易に思いつくのが，TDOA 併用である．しかし，TSOA 測位と同等以上の性能が実現できなければ適用は不利である．この TDOA 併用は，基準局で距離和を算出する方法と，基準局以外で距離和を算出する方法がある．しかし，これらの方法の性能は不明である．なお，TDOA 併用は，Tt の検出誤差が，1 個の距離和算出のみに影響し，他の複数個の距離差算出には影響しないとの特徴を有する．

本論文では，Taylor 級数推定法において，TSOA と他の方法との推定誤差を解析的に比較する．また受信局が増加すれば，必ず高性能になるかどうかを明らかにする．更に，推定が可能かの判定を含めた推定精度の指標及び推定誤差の上界及び下界の算出式を示す．なお，時刻検出誤差の分散は各局で異なってもよいとする．

2. TSOA による測位

ここでは，n 個の距離和観測値から，三次元の目標位置を推定する方法について述べる．

2.1 距離和の観測モデル

目標とは異なる位置にある送信局（$i=0$）及び i ($i=1,2,\cdots,n$) 番目の受信局の位置ベクトル $\underline{B}_i$（位置は既知）を，D^T は行列 D の転置行列を表すとして，三次元直交座標により次式で表す．

$$\underline{B}_i=(x_i,y_i,z_i)^T \tag{1}$$

一方，目標の位置ベクトル $\underline{L}$（位置は未知）の真値を次式で表す．

$$\underline{L}=(x_l,y_l,z_l)^T \tag{2}$$

すると，目標と i 番目の局の距離の真値 R_i は次式となる．

$$R_i=f_i(x_l,y_l,z_l) \tag{3}$$

ここで，次式を定義する．なお，≜ は定義式を表す．

$$f_i(x,y,z)\triangleq\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2} \tag{4}$$

ところで，送信時刻の真値を t_0，受信時刻の真値を t_i ($i=1,2,\cdots,n$)，光の速さ（電波の伝搬速度）を c とする．すると，式 (3) より，次式を得る

$$R_i+R_0=c(t_i-t_0) \tag{5}$$

つぎに，時刻検出誤差 ε_i ($i=0,1,\cdots,n$) は白色で互いに無相関として，次式を仮定する．ここで，$E[\ ]$ は平均を表す記号とする．

$$E[\varepsilon_i]=0 \quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{6}$$

$$E[\varepsilon_i\varepsilon_j]=\begin{cases}\rho_i^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{7}$$

ここで，送信局と目標間の距離と，目標と i 番目の受信局間の距離との和の観測値 r_{i0o} は，式 (5) より，次式となる．

$$\begin{aligned}r_{i0o}&=c\{(t_i+\varepsilon_i)-(t_0+\varepsilon_0)\}\\&=R_i+R_0+v_i-v_0\end{aligned} \tag{8}$$

ここで，次式を定義する．

$$v_i \triangleq c\varepsilon_i \tag{9}$$

すると，式 (8) に全微分の公式を使用して，つぎの性質を得る．なお，非線形関数である距離を線形近似して，解きやすい形にする手法は，GPS 等で使用されている [1], [4]〜[7], [13].

（性質 1）目標の位置推定のための初期値を x_l^0，y_l^0，z_l^0 とすると，次式を得る．

$$\Delta r_{i0o} \approx (\alpha_i+\alpha_0)(x_l-x_l^0)+(\beta_i+\beta_0)(y_l-y_l^0) + (\gamma_i+\gamma_0)(z_l-z_l^0)+v_i-v_0 \tag{10}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta r_{i0o} \triangleq R_i+R_0+v_i-v_0 - \{f_i(x_l^0,y_l^0,z_l^0)+f_0(x_l^0,y_l^0,z_l^0)\} \tag{11}$$

$$\alpha_i \triangleq -\frac{x_i-x_l^0}{f_i(x_l^0,y_l^0,z_l^0)},\quad \beta_i \triangleq -\frac{y_i-y_l^0}{f_i(x_l^0,y_l^0,z_l^0)}$$

$$\gamma_i \triangleq -\frac{z_i-z_l^0}{f_i(x_l^0,y_l^0,z_l^0)} \tag{12}$$

2.2 線形モデル

n 個の受信局で距離和を観測するとすれば，式 (10) より，次式の線形観測モデルを得る [9].

$$\underline{b}_s = A_s\underline{a}+\underline{v}_s \tag{13}$$

ここで，

$$\underline{b}_s = (\Delta r_{10o},\cdots,\Delta r_{n0o})^T \tag{14}$$

$$\underline{a} = (x-x_l^0, y-y_l^0, z-z_l^0)^T \tag{15}$$

$$\underline{v}_s = (v_1-v_0,\cdots,v_n-v_0)^T \tag{16}$$

で，また，式 (12) を使用して，

$$\underline{\omega}(i) = (\,\alpha_i \quad \beta_i \quad \gamma_i\,) \tag{17}$$

とし，次式を定義する．

$$A_s \triangleq \left([\underline{\omega}(1)+\underline{\omega}(0)]^T \quad \cdots \quad [\underline{\omega}(n)+\underline{\omega}(0)]^T \right)^T \tag{18}$$

なお，行列 A_s を配置行列と呼ぶ．更に，$\underline{0}$ は零ベクトルを表すとすれば，式 (16) に，式 (6) 及び (7) を使用し，次式を得る．

$$E[\underline{v}_s] = \underline{0} \tag{19}$$

$$V_s = E\left[\underline{v}_s\underline{v}_s^T\right] = c^2\begin{pmatrix} {\rho_1}^2+{\rho_0}^2 & {\rho_0}^2 & \cdots & {\rho_0}^2 \\ {\rho_0}^2 & {\rho_2}^2+{\rho_0}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & {\rho_0}^2 \\ {\rho_0}^2 & \cdots & {\rho_0}^2 & {\rho_n}^2+{\rho_0}^2 \end{pmatrix} \tag{20}$$

なお，式 (20) は，次の性質が示すように，正則行列である．ここで，$D>0$ は行列 D が正値対称行列，$D\geq 0$ は行列 D が半正値対称行列を表す．なお，証明は，文献 [13] の性質 5 と同様である．ところで，式 (20) は，一般的なマルチセンサとは異なり，対角行列ではない．

（性質 2）$\rho_i^2 > 0$ $(i=0,\cdots,n)$ とすれば，次式を得る．

$$V_s > 0 \tag{21}$$

なお，以下，$\rho_i^2>0$ $(i=0,\cdots,n)$ とする．

2.3 重み付き最小自乗解

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [14], [15] により，目標の位置が算出できることを示す．

（性質 3）式 (13) において，重み付き最小自乗法により，次式を最小とする $\hat{\underline{a}}_s$ を推定する．

$$J_s = (\,\underline{b}_s - A_s\hat{\underline{a}}_s)^T V_s^{-1}(\,\underline{b}_s - A_s\hat{\underline{a}}_s) \tag{22}$$

解は，$A_s^TV_s^{-1}A_s$ が正則ならば，次式である．

$$\hat{\underline{a}}_s = (A_s^TV_s^{-1}A_s)^{-1}A_s^TV_s^{-1}\underline{b}_s \tag{23}$$

次の性質は，算出した目標位置が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す．

（性質 4）式 (23) は，次の性質を有する．

$$E[\,\hat{\underline{a}}_s] = \underline{a} \tag{24}$$

$$E\left[(\,\hat{\underline{a}}_s-\underline{a})(\,\hat{\underline{a}}_s-\underline{a})^T\right] = (A_s^TV_s^{-1}A_s)^{-1} \tag{25}$$

2.4 重み付き最小自乗解の性質

ここでは，TSOA 測位において，重み付き線形最小自乗法により解が算出できるための条件について述べる．

まず，本論文に使用する前提条件を次に示す．

（前提条件 1）$\underline{\omega}(i)+\underline{\omega}(0)$ $(i=1,\cdots,n)$ のうち．いずれか 3 個が 1 次独立とする．なお，$3\leq n$ とする．

ところで，式 (17) の $\underline{\omega}(i)$ は，式 (12) 及び (4) が示すように，目標と局の相対的な位置関係で決まる単位

ベクトルである．次の性質は，この単位ベクトルを使用した解の存在条件を示す．なお，証明は，文献 [16] の性質 4 と同様である．

（性質 5）前提条件 1 が成立するときのみ，$A_s^T V_s^{-1} A_s$ は正値対称行列である．

3. TDOA による測位

ここでは，n − 1 個の距離差観測値から，三次元の目標位置を推定する方法について述べる．

3.1 線形モデル

1 番目の受信局を基準局として，

$$\Delta r_{di1o} = R_i - R_1 + v_i - v_1 - \{f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0) - f_1(x_l^0, y_l^0, z_l^0)\} \quad (26)$$

を観測するとすれば，次の線形観測モデルを得る [13]．

$$\underline{b}_d = A_d \underline{a} + \underline{v}_d \quad (27)$$

ここで，

$$\underline{b}_d = (\Delta r_{d21o}, \cdots, \Delta r_{dn1o})^T \quad (28)$$

$$\underline{v}_d = (v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1)^T \quad (29)$$

で，また，式 (17) を使用して，次式を定義する．

$$A_d \triangleq \left([\underline{\omega}(2) - \underline{\omega}(1)]^T \quad \cdots \quad [\underline{\omega}(n) - \underline{\omega}(1)]^T\right)^T \quad (30)$$

更に，式 (29) に，式 (6) 及び (7) を使用して，次式を得る．

$$E[\underline{v}_d] = \underline{0} \quad (31)$$

$$V_d = E\left[\underline{v}_d \underline{v}_d^T\right] = c^2 \begin{pmatrix} {\rho_2}^2 + {\rho_1}^2 & {\rho_1}^2 & \cdots & {\rho_1}^2 \\ {\rho_1}^2 & {\rho_3}^2 + {\rho_1}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & {\rho_1}^2 \\ {\rho_1}^2 & \cdots & {\rho_1}^2 & {\rho_n}^2 + {\rho_1}^2 \end{pmatrix} \quad (32)$$

なお，V_d は正値対称行列である [13]．

3.2 1 重み付き最小自乗解

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [14], [15] により，目標の位置が算出できることを示す [13]．

（性質 6）式 (27) において，重み付き最小自乗法による解は，$A_d^T V_d^{-1} A_d$ が正則ならば，次式である．

$$\hat{\underline{a}}_d = (A_d^T V_d^{-1} A_d)^{-1} A_d^T V_d^{-1} \underline{b}_d \quad (33)$$

次の性質は，算出した目標位置が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す．

（性質 7）式 (33) は，次の性質を有する．

$$E[\hat{\underline{a}}_d] = \underline{a} \quad (34)$$

$$E\left[(\hat{\underline{a}}_d - \underline{a})(\hat{\underline{a}}_d - \underline{a})^T\right] = (A_d^T V_d^{-1} A_d)^{-1} \quad (35)$$

4. TDOA 併用による測位

ここでは，1 個の距離和観測値と，n − 1 個の距離差観測値から，三次元空間での目標位置を推定する方法について述べる．

4.1 基準局での距離和算出

TDOA による測位に，基準局での距離和観測値が付加されるとすると，式 (10) 及び (26) より，次の線形モデルを得る．

$$\underline{b}_{d1} = A_{d1} \underline{a} + \underline{v}_{d1} \quad (36)$$

ここで，

$$\underline{b}_{d1} = (\Delta r_{10o}, \Delta r_{d21o}, \cdots, \Delta r_{dn1o})^T \quad (37)$$

$$\underline{v}_{d1} = (v_1 - v_0, v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1)^T \quad (38)$$

で，また，式 (17) 及び (30) を使用して，次式を定義する．

$$A_{d1} \triangleq \left([\underline{\omega}(1) + \underline{\omega}(0)]^T \quad A_d^T\right)^T \quad (39)$$

更に，式 (38) に，式 (6) 及び (7) を使用して，次式を得る．

$$E[\underline{v}_{d1}] = \underline{0} \quad (40)$$

$$V_{d1} = E\left[\underline{v}_{d1} \underline{v}_{d1}^T\right] = c^2 \begin{pmatrix} \rho_1^2 + \rho_0^2 & -\rho_1^2 & -\rho_1^2 & \cdots & -\rho_1^2 \\ -\rho_1^2 & \rho_2^2 + \rho_1^2 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^2 \\ -\rho_1^2 & \rho_1^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \rho_1^2 \\ -\rho_1^2 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^2 & \rho_n^2 + \rho_1^2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

式 (41) は，距離和が，距離差全てと相関をもつことを示す．

なお，式 (41) は，次の性質が示すように，正則行列である．

（性質 8）次式が成立する．

$$V_{d1} > 0 \tag{42}$$

（証明）式 (41) は誤差共分散行列であるので，半正値対称行列である．したがって，式 (41) の行列の行列式が 0 にならないことを示せばよい．

式 (41) より，次式を得る．なお，$|D|$ は，行列 D の行列式を表す．

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{c^2}V_{d1}\right| \\
&= \begin{vmatrix} \rho_1^2+\rho_0^2 & -\rho_1^2 & -\rho_1^2 & \cdots & -\rho_1^2 \\ -\rho_1^2 & \rho_2^2+\rho_1^2 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^2 \\ -\rho_1^2 & \rho_1^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \rho_1^2 \\ -\rho_1^2 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^2 & \rho_n^2+\rho_1^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \rho_1^2+\rho_0^2 & \rho_0^2 & \rho_0^2 & \cdots & \rho_0^2 \\ -\rho_1^2 & \rho_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho_1^2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\rho_1^2 & 0 & \cdots & 0 & \rho_n^2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \rho_1^2+\rho_0^2+\left(\rho_0^2\rho_1^2\cdot\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\rho_i^2}\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho_1^2 & \rho_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho_1^2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\rho_1^2 & 0 & \cdots & 0 & \rho_n^2 \end{vmatrix} \\
&= \left\{\rho_1^2+\rho_0^2+\left(\rho_0^2\rho_1^2\cdot\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\rho_i^2}\right)\right\}\prod_{i=2}^{n}\rho_i^2 \neq 0
\end{aligned} \tag{43}$$

式 (43) より，結論を得る．（証明終）

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [14], [15] により，目標の位置が算出できることを示す．

（性質 9）式 (36) において，重み付き最小自乗法による解は，$A_{d1}{}^T V_{d1}{}^{-1} A_{d1}$ が正則ならば，次式である．

$$\underline{\hat{a}}_{d1} = (A_{d1}{}^T V_{d1}{}^{-1} A_{d1})^{-1} A_{d1}{}^T V_{d1}{}^{-1} \underline{b}_{d1} \tag{44}$$

次の性質は，算出した目標位置が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す．

（性質 10）式 (44) は，次の性質を有する．

$$E[\,\underline{\hat{a}}_{d1}] = \underline{a} \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
&E\left[(\,\underline{\hat{a}}_{d1}-\underline{a})(\,\underline{\hat{a}}_{d1}-\underline{a})^T\right] \\
&= (A_{d1}{}^T V_{d1}{}^{-1} A_{d1})^{-1} > 0
\end{aligned} \tag{46}$$

4.2 基準局以外での距離和算出

TDOA による測位に，基準局以外での距離和観測値が付加されるとする．n 番目の受信局で距離和を観測するとすれば，式 (10) 及び (26) より，次の線形モデルを得る．

$$\underline{b}_{dn} = A_{dn}\underline{a} + \underline{v}_{dn} \tag{47}$$

ここで，

$$\underline{b}_{dn} = (\Delta r_{n0o}, \Delta r_{d21o}, \cdots, \Delta r_{dn1o})^T \tag{48}$$

$$\underline{v}_{dn} = (v_n - v_0, v_2 - v_1, \cdots, v_n - v_1)^T \tag{49}$$

で，また，式 (17) 及び (30) を使用して，次式を定義する．

$$A_{dn} \triangleq \left(\,[\,\underline{\omega}(n) + \underline{\omega}(0)]^T \quad A_d^T\,\right)^T \tag{50}$$

更に，式 (49) に，式 (6) 及び (7) を使用して，次式を得る．

$$E[\,\underline{v}_{dn}] = \underline{0} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
V_{dn} &= E\left[\,\underline{v}_{dn}\underline{v}_{dn}^T\right] \\
&= c^2\begin{pmatrix} \rho_n^2+\rho_0^2 & 0 & \cdots & 0 & \rho_n^2 \\ 0 & \rho_2^2+\rho_1^2 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^2 \\ \vdots & \rho_1^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & \rho_1^2 \\ \rho_n^2 & \rho_1^2 & \cdots & \rho_1^2 & \rho_n^2+\rho_1^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{52}$$

式 (52) は，距離和は，n 番目の受信局の距離差のみと相関をもつことを示す．

なお，式 (52) は，次の性質が示すように，正則行列である．

（性質 11）次式が成立する．

$$V_{dn} > 0 \tag{53}$$

（証明）任意の n 次元ベクトル $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$ に対して，$(\,\underline{r}, \underline{s}\,)$ はベクトル $\underline{r}$，$\underline{s}$ の内積を表すとすれば，式 (52) より，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{c^2}V_{dn}\underline{x}, \underline{x}\right) = \rho_n^2(x_1+x_n)^2 \\
&+\rho_0^2x_1^2+\rho_1^2x_n^2+\left(V_{dn}(x_2,\cdots,x_n)^T, (x_2,\cdots,x_n)^T\right)
\end{aligned} \tag{54}$$

式 (54) より，V_d は正値対称行列を使用して，結論を得る．（証明終）

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [14], [15] により，目標の位置が算出できることを示す．

（性質 12）式 (47) において，重み付き最小自乗法による解は，${A_{dn}}^T {V_{dn}}^{-1} A_{dn}$ が正則ならば，次式である．

$$\underline{\hat{a}}_{dn} = ({A_{dn}}^T {V_{dn}}^{-1} A_{dn})^{-1} {A_{dn}}^T {V_{dn}}^{-1} \underline{b}_{dn} \quad (55)$$

5. 測位法の比較

ここでは，TSOA，TDOA 及び TDOA 併用による測位の関連と比較について述べる．

5.1 TDOA 併用による測位法間の関連

ここでは，TDOA 併用による測位において，基準局で距離和を算出しても，それ以外で算出しても，結果は同一であることを示す．

$1 \times n$ の行列 F_n を，

$$F_n = (\,0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1\,) \quad (56)$$

とし，I_n を $n \times n$ の単位行列，$O_{m,n}$ を $m \times n$ の零行列として，次式を定義する．

$$N \triangleq \begin{pmatrix} 1 & -1 \cdot F_{n-1} \\ O_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \quad (57)$$

すると，式 (38) 及び (49) より，次式を得る．

$$\underline{v}_{d1} = N \underline{v}_{dn} \quad (58)$$

また，式 (37) 及び (48) より，式 (11) 及び (26) を使用して，次式を得る．

$$\underline{b}_{d1} = N \underline{b}_{dn} \quad (59)$$

更に，式 (39) 及び (50) より，式 (30) を使用して，次式を得る．

$$A_{d1} = N A_{dn} \quad (60)$$

次の性質は，TDOA 併用において，距離和をどの受信局で算出しても，測位結果は同一であることを示す．

（性質 13）$A_{d1}^T V_{d1}^{-1} A_{d1}$ が正則ならば，次式が成立する．

$$\underline{\hat{a}}_{d1} = \underline{\hat{a}}_{dn} \quad (61)$$

（証明）式 (41) 及び (52) より，式 (58) を使用して，次式を得る．

$$V_{d1} = N V_{dn} N^T \quad (62)$$

式 (57) は正則行列であるので，式 (62) より，次式を得る．

$$V_{d1}^{-1} = \left[N^T\right]^{-1} V_{dn}^{-1} N^{-1} \quad (63)$$

式 (44) の右辺に，式 (60)，(63) 及び (59) を代入して，式 (55) の右辺を得る．（証明終）

5.2 TSOA と TDOA 併用の関連

ここでは，TSOA と TDOA 併用の測位結果は同一であることを示す．

$1 \times n$ の行列 E_n を，

$$E_n = (\,1 \quad \cdots \quad 1\,) \quad (64)$$

とし，次式を定義する．

$$M \triangleq \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n-1} \\ 1 \cdot E_{n-1}^T & I_{n-1} \end{pmatrix} \quad (65)$$

すると，式 (16) 及び (38) より，次式を得る．

$$\underline{v}_s = M \underline{v}_{d1} \quad (66)$$

また，式 (14) 及び (37) より，式 (11) 及び (26) を使用して，次式を得る．

$$\underline{b}_s = M \underline{b}_{d1} \quad (67)$$

更に，式 (18) 及び (39) より，式 (30) を使用して，次式を得る．

$$A_s = M A_{d1} \quad (68)$$

次の性質は，TDOA 併用と TSOA において，送信時刻及び受信時刻の検出誤差の分散がどのような場合でも，測位結果は同一であることを示す．

（性質 14）$A_s^T V_s^{-1} A_s$ が正則ならば，次式が成立する．

$$\underline{\hat{a}}_s = \underline{\hat{a}}_{d1} \quad (69)$$

（証明）式 (20) 及び (41) より，式 (66) を使用して，次式を得る．

$$V_s = M V_{d1} M^T \quad (70)$$

式 (65) は正則行列であるので，式 (70) より，次式を得る．

$$V_s^{-1} = \left[M^T\right]^{-1} V_{d1}^{-1} M^{-1} \quad (71)$$

式 (23) の右辺に，式 (68)，(71) 及び (67) を代入して，式 (44) の右辺を得る．(証明終)

5.3 TDOA と TDOA 併用の比較

ここでは，TDOA で測位可能ならば，送信時刻の検出性能が劣悪でも，送受信局の配置によらず，TDOA 以上の性能が，TDOA 併用で実現できることを示す．なお，基準局にどの受信局を選択しても，同一の測位結果を得ることは，既に報告済みである [17].

次の性質より，式 (46) 及び (35) を使用して，距離和観測値を付加すれば，TDOA 以上の位置推定精度となることが分かる．

（性質 15）

$$A_d^T V_d^{-1} A_d > 0 \tag{72}$$

とすれば，次式を得る．

$$\left[A_{d1}{}^T V_{d1}{}^{-1} A_{d1}\right]^{-1} \le \left[A_d^T V_d^{-1} A_d\right]^{-1} \tag{73}$$

（証明）式 (32) 及び (41) より，式 (64) を使用して，次式を得る．

$$V_{d1} = \begin{pmatrix} c^2[\rho_1^2 + \rho_0^2] & -c^2\rho_1^2 \cdot E_{n-1} \\ -c^2\rho_1^2 \cdot E_{n-1}^T & V_d \end{pmatrix} \tag{74}$$

ここで，性質 8 より，V_{d1} は正値対称行列である．したがって，式 (74) に，付録の式 (A·4) を使用して，次式を得る．

$$\begin{pmatrix} 0 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & V_d^{-1} \end{pmatrix} \le V_{d1}^{-1} \tag{75}$$

式 (75) より，次式を得る．

$$A_{d1}^T \begin{pmatrix} 0 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & V_d^{-1} \end{pmatrix} A_{d1} \le A_{d1}^T V_{d1}^{-1} A_{d1} \tag{76}$$

式 (39) より，次式を得る．

$$A_{d1}^T \begin{pmatrix} 0 & O_{1,n-1} \\ O_{n-1,1} & V_d^{-1} \end{pmatrix} A_{d1} = A_d^T V_d^{-1} A_d \tag{77}$$

式 (76) 及び (77) より，次式を得る．

$$A_d^T V_d^{-1} A_d \le A_{d1}^T V_{d1}^{-1} A_{d1} \tag{78}$$

式 (78) 及び (72) より，式 (73) を得る（一般に，$0 < D_1 \le D_2$ ならば $0 < D_2^{-1} \le D_1^{-1}$）．(証明終)

6. 考　　察

ここでは，TSOA と TDOA との性能比較，並びに TSOA における推定誤差の上界・下界及び受信局増加の影響について述べる．

6.1 TSOA と TDOA との比較

TSOA 測位結果と TDOA 測位結果とを直接比較するのは困難であった．しかし，TDOA 併用測位は，TDOA 測位に距離和を一つ付加した測位法なため，比較が可能であった．

このため，本論文では，まず，性質 14 及び 13 で示したように，TSOA 測位結果と TDOA 併用測位結果とが同一であることを明らかにした．次に，性質 15 で示したように，TSOA は TDOA 併用以上の推定精度であることを明らかにした．この結果，TSOA は TDOA 以上の推定精度であることが明らかになった．

6.2 推定誤差上界・下界の簡易な算出式

式 (20) の TSOA の観測雑音共分散行列も，式 (41) 及び (52) の TDOA 併用の観測雑音共分散行列も，対角行列ではない．このため，測位誤差共分散行列の評価は，容易ではない．ここでは，時刻検出誤差の分散の最大値，最小値を使用した TSOA 測位誤差共分散行列の評価法を導出する．

まず，次式を定義する．

$$V \triangleq c^2 \cdot diag\{\rho_0^2, \cdots, \rho_n^2\} \tag{79}$$

ここで，$diag\{a_1, \cdots, a_n\}$ は対角成分を $a_1, \cdots, a_n$ とする対角行列を表す．

つぎに，式 (64) を使用して，次式を定義する．

$$L \triangleq (\, 1 \cdot E_n^T \quad I_n \,) \tag{80}$$

すると，式 (80)，(79) 及び (20) より，次式を得る．

$$V_s = LVL^T \tag{81}$$

式 (81) より，次式を得る．

$$A_s^T V_s^{-1} A_s = A_s^T \left[LVL^T\right]^{-1} A_s \tag{82}$$

次の性質は，TSOA の測位誤差共分散行列の上界・下界の算出に使用する．

（性質 16）次式が成立する．

$$I_n \le LL^T \le (n+1) I_n \tag{83}$$

（証明）式 (80) より，次式を得る．

$$LL^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{84}$$

式 (84) より，次式を得る．

$$|LL^T-\lambda I_n| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -(1-\lambda) & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -(1-\lambda) & 0 & 1-\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ -(1-\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^{n-1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^{n-1} \begin{vmatrix} 2-\lambda+n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^{n-1}(n+1-\lambda) \tag{85}$$

式 (85) より，LL^T の固有値は $\mathrm{n}+1$ 及び 1 であるので，結論を得る．（証明終）

次の性質は，式 (25) の測位誤差共分散行列の上界及び下界を示す．また，配置行列 A_s の最小特異値（$A_s^TA_s$ の最小固有値の平方根と等価 [15]）が大きければ，$\underline{\hat{a}}_s$ は発散しない（式 (23) 参照）ことを示す．

（性質 17）A_s の最小特異値を $\lambda_{\min}$，最大特異値を $\lambda_{\max}$，ρ_i $(i=0,\cdots,n)$ のうちの最小値を $\rho_{\min}$，最大値を $\rho_{\max}$ とする．すると，前提条件 1 が成立すれば，次式が成立する．

$$\frac{c^2\rho_{\min}^2}{{\lambda_{\max}}^2}I_3 \le \left[A_s^T V_s^{-1} A_s\right]^{-1} \le \frac{(n+1)c^2\rho_{\max}^2}{{\lambda_{\min}}^2}I_3 \tag{86}$$

（証明）式 (79) より，次式を得る．

$$c^2\cdot\rho_{\min}^2 I_{n+1} \le V \le c^2\cdot\rho_{\max}^2 I_{n+1} \tag{87}$$

式 (83) 及び (87) より，次式を得る．

$$0 < c^2\rho_{\min}^2 I_n \le LVL^T \le (n+1)c^2\rho_{\max}^2 I_n \tag{88}$$

式 (88) より，次式を得る．

$$0 < \frac{1}{(n+1)c^2\rho_{\max}^2}I_n \le \left[LVL^T\right]^{-1} \le \frac{1}{c^2\rho_{\min}^2}I_n \tag{89}$$

性質 5 より，次式を得る．

$$0 < \lambda_{\min}^2 I_3 \le A_s^TA_s \le \lambda_{\max}^2 I_3 \tag{90}$$

式 (89) 及び (90) より，次式を得る．

$$0 < \frac{\lambda_{\min}^2}{(n+1)c^2\rho_{\max}^2}I_3 \le A_s^T\left[LVL^T\right]^{-1}A_s \le \frac{\lambda_{\max}^2}{c^2\rho_{\min}^2} \tag{91}$$

式 (82) 及び (91) より，式 (86) を得る．（証明終）

6.3 受信局増加の影響

ここでは，受信局を増加させた場合，受信局の配置や受信時刻の検出精度によらず，必ず測位精度が向上するかどうかを検討する．なお，検討は，TSOA に対して行うが，性質 14 及び 13 より，TDOA 併用にも適用できる．

式 (13) の n 個の受信局で距離和を観測する線形観測モデルに，受信局が m 個増えた場合の線形観測モデルを

$$\underline{b}_s{}' = (\Delta r_{m+10o},\cdots,\Delta r_{m+n0o})^T \tag{92}$$

$$\underline{v}_s{}' = (v_{m+1}-v_0,\cdots,v_{m+n}-v_0)^T \tag{93}$$

$$A_s{}' = \left([\underline{\omega}(m+1)+\underline{\omega}(0)]^T \ \cdots \ [\underline{\omega}(m+n)+\underline{\omega}(0)]^T\right)^T \tag{94}$$

として，次のように定義する．

$$\underline{b}_{s+} \triangleq A_{s+}\underline{a} + \underline{v}_{s+} \tag{95}$$

ここで，

$$\underline{b}_{s+} = \left(\underline{b}_s^T, \left[\underline{b}_s{}'\right]^T\right)^T \tag{96}$$

$$A_{s+} = \left(A_s^T \quad \left[A_s{}'\right]^T\right)^T \tag{97}$$

$$\underline{v}_{s+} = \left(\underline{v}_s^T, \left[\underline{v}_s{}'\right]^T\right)^T \tag{98}$$

である．すると，式 (98)，(16)，(9)，(7)，(20) 及び (64) より，次式を得る．

$$\begin{aligned} V_{s+} &= E\left[\underline{v}_{s+}\underline{v}_{s+}^T\right] \\ &= \begin{pmatrix} V_s & c^2{\rho_0}^2 \cdot E_n^T E_m \\ c^2{\rho_0}^2 \cdot E_m^T E_n & V_s' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{99}$$

ここで，次式を定義する．

$$V_s' \triangleq E\left[\underline{v}_s'(\underline{v}_s')^T\right] \tag{100}$$

次の性質及び性質 4 は，観測値，すなわち受信局が増加すれば，位置推定精度がよくなることはあっても劣化はないを示す．

（性質 18）

$$A_s^T V_s^{-1} A_s > 0 \tag{101}$$

とすれば，次式を得る．

$$\left[A_{s+}^T V_{s+}^{-1} A_{s+}\right]^{-1} \leq \left[A_s^T V_s^{-1} A_s\right]^{-1} \tag{102}$$

（証明）性質 2 より，V_{s+} は正値対称行列である．したがって，式 (99) に，付録の式 (A·3) を使用して，次式を得る．

$$\begin{pmatrix} V_s^{-1} & O_{n,m} \\ O_{m,n} & 0I_m \end{pmatrix} \leq V_{s+}^{-1} \tag{103}$$

式 (103) より，次式を得る．

$$A_{s+}^T \begin{pmatrix} V_s^{-1} & O_{n,m} \\ O_{m,n} & 0I_m \end{pmatrix} A_{s+} \leq A_{s+}^T V_{s+}^{-1} A_{s+} \tag{104}$$

式 (97) より，次式を得る．

$$A_{s+}^T \begin{pmatrix} V_s^{-1} & O_{n,m} \\ O_{m,n} & 0I_m \end{pmatrix} A_{s+} = A_s^T V_s^{-1} A_s \tag{105}$$

式 (104) 及び (105) より，次式を得る

$$A_s^T V_s^{-1} A_s \leq A_{s+}^T V_{s+}^{-1} A_{s+} \tag{106}$$

式 (106) 及び (101) より，式 (102) を得る．（証明終）

7. むすび

本論文では，Taylor 級数推定法において，TSOA と TDOA 併用は，同一の推定結果となることを解析的に示した．また，TSOA は TDOA 以上の推定精度となることを解析的に示した．更に，TSOA において，受信局が増加した場合，推定精度に劣化はないことを明らかにした．なお，時刻検出誤差の分散は各局で異なってもよいとした．更に，推定が可能かの判定を含めた推定精度の指標として，配置行列の最小特異値を提案した．また，配置行列の特異値と観測誤差の分散を使用した，推定誤差の上界及び下界の算出式を示した．

文　献

[1] 佐田達典，GPS 測量技術，オーム社，東京，2003.

[2] 西谷芳雄，電波計器，成山堂書店，東京，2002.

[3] 安田明生，“GPS の現状と展望，” 信学誌，vol.82, no.12, pp.1207–1215, Dec. 1999.

[4] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[5] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[6] 坂井丈泰，GPS 技術入門，東京電機大学出版局，東京，2003.

[7] J. Yan, C.C.J.M. Tiberious, G.J.M. Janssen, P.J.G. Teunissen, and G. Bellusci, “Review of range-based positioning algoritmsn,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. Mag., vol.28, no.6, pp.2–27, Aug. 2013.

[8] W.H. Foy, “Position-location solutions by Taylor-series estimation,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.12, no.2, pp.187–194, March 1976.

[9] X. Zheng, Z. Hua, Z. Zheng, H. Peng, and L. Meng, “Wireless localization based on the time sum of arrival and Taylor expansion,” 19th IEEE International Conference on Networks (ICON), 2013, Dec. 2013.

[10] Z. Guannan, W. Donglin, and F. Michel, “Time sum of arrival based BLUE for mobile target positioning,” Advanced Science Letters, vol.4, no.1, pp.165–167, Jan. 2011.

[11] W.K. Chao and K.T. Lay, “Mobile positioning and tracking based on TOA TSOA TDOA AOA with NLOS-reduced distance measurement,” IEICE Trans. Commun., vol.E90-B, no.12, pp.2043–2053, Dec. 2007.

[12] K.T. Lay and W.K. Chao, “Mobile positioning based on TOA/TSOA/TDOA measurements with NLOS error reduction,” Proc. International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems, pp.545–548, Dec. 2005.

[13] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，“TOA と TDOA 測位の同一性，” 信学論（B），vol.J98-B, no.2, pp.223–233, Feb. 2015.

[14] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[15] 中川　徹，小柳義夫，最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，東京，1982.

[16] 小菅義夫，“特異値による TOA 測位精度の解析，” 信学論（B），vol.J97-B, no.3, pp.333–340, March 2014.

[17] 宮崎裕己，小菅義夫，島田浩樹，田中俊幸，“TDOA 測位における基準局選択と測位結果の関連，” 信学論（B），vol.J97-B, no.12, pp.1234–1242, Dec. 2014.

付　　録

（定理1）D は $(m+n)\times(m+n)$，D_{11} は $m\times m$，D_{22} は $n\times n$ の行列で，

$$D=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{pmatrix} > 0 \tag{A·1}$$

とする．すると，D_{11}，D_{22} 及び $H = D_{22} - D_{12}^T D_{11}^{-1} D_{12}$ は，正値対称行列で，次式が成立する [5]．

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} D_{11}^{-1}+D_{11}^{-1}D_{12}H^{-1}D_{12}^TD_{11}^{-1} & -D_{11}^{-1}D_{12}H^{-1} \\ -H^{-1}D_{12}^TD_{11}^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \tag{A·2}$$

更に，次式が成立する．

$$D^{-1} \geq \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & O_{m,n} \\ O_{n,m} & 0I_n \end{pmatrix} \tag{A·3}$$

$$D^{-1} \geq \begin{pmatrix} 0I_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & D_{22}^{-1} \end{pmatrix} \tag{A·4}$$

（証明）$\underline{x}$ を m 次元ベクトルとして，$\underline{y}$ を n 次元ベクトルとして，内積を考えれば，式 (A·2) より，次式を得る．

$$\left(\left[D^{-1} - \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} & O_{m,n} \\ O_{n,m} & 0I_n \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix}\right) = \left(H^{-1}\left[D_{12}^TD_{11}^{-1}\underline{x}-\underline{y}\right], \left[D_{12}^TD_{11}^{-1}\underline{x}-\underline{y}\right]\right) \geq 0 \tag{A·5}$$

式 (A·5) より，式 (A·3) を得る．　　　（証明終）

（平成28年3月9日受付，5月5日再受付，
6月9日早期公開）

小菅　義夫　（正員）

昭47早大・理工・数学卒．昭49同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平16長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員．電通大特任教授．工博．IEEE シニア会員．

古賀　　禎　（正員）

平5年東京理科大・理工・電気卒．平7年同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入所．平13年カリフォルニア大デービス校客員研究員．工博．二次監視レーダ，空港面監視システムの研究に従事．

宮崎　裕己　（正員）

平3信州大・工卒．平5同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入省．以来，二次監視レーダやマルチラテレーションに関する研究開発に従事．電気学会会員．

秋田　　学　（正員）

平17大阪大・工・電子情報エネルギー工卒，平20同大大学院博士前期課程了．平23同大大学院博士後期課程了．平24ニューメキシコ工科大学博士研究員．平25電気通信大学大学院情報理工学研究科助教．

稲葉　敬之　（正員）

昭56東工大・理・物理卒，昭58同大大学院修士課程了．同年，三菱電機（株）入社．平20年4月より電通大教授．工博．レーダ信号処理，超電導磁気センサ信号処理，アダプティブアレー信号処理，車載レーダの研究開発等に従事．IEEE シニア会員．