

## 距離とドップラーを観測値とする位置及び速度推定

小菅 義夫<sup>†,††</sup> 古賀 禎<sup>†</sup> 宮崎 裕己<sup>†</sup> 秋田 学<sup>††</sup> 稲葉 敬之<sup>††</sup>

<sup>†</sup> 電子航法研究所 〒182-0012 東京都調布市深大寺東町 7-42-23

<sup>††</sup> 電気通信大学 〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1

E-mail: <sup>†</sup> kosuge@enri.go.jp <sup>††</sup> y-kosuge@uec.ac.jp

**あらまし** TOA (Time of Arrival) 測位は、送受信機間の距離を同時に複数観測し、目標の位置を推定する。この代表例は、GPS (Global Positioning System) である。ところで、TOA 測位では、送受信機の配置により測位精度が大きく変化し、発散する場合すらある。本稿では、Taylor 展開推定法において、距離のみを観測する TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば、距離とドップラー (距離の時間微分値) を複数同時に観測し三次元の位置及び速度が推定可能なことを示す。また、ドップラーの観測精度や送受信機の配置がどのような場合でも、ドップラーの使用による位置推定精度の劣化はないことを示す。

**キーワード** TOA, GPS, 測位, 誤差解析, 距離, ドップラー

## Location and Velocity Estimation Using Range and Doppler Measurements

Yoshio KOSUGE<sup>†,††</sup>, Tadashi KOGA<sup>†</sup>, Hiromi MIYAZAKI<sup>†</sup>, Manabu Akita<sup>††</sup>, and Takayuki Inaba<sup>††</sup>

<sup>†</sup> Electronic Navigation Research Institute 7-42-23 Jindaijihigashi-machi, Chofu-shi, Tokyo, 182-0012 Japan

<sup>††</sup> University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585 Japan

E-mail: <sup>†</sup> kosuge@enri.go.jp <sup>††</sup> y-kosuge@uec.ac.jp

**Abstract** In a TOA (Time of Arrival) system such as the GPS (Global Positioning System), a target location can be estimated from several distance (range) measurements between a target location and reference points. However, accuracy of estimated target location is very sensitive to target and reference points geometry. In this paper, we illustrate that when we can estimate 3-dimensional target location using the conventional TOA system by Taylor-Series estimation, we can also estimate 3-dimensional target location and velocity using several range and Doppler measurements. We also show that estimated location accuracy becomes better when using additional Doppler measurements even in cases of poor target and reference points geometry or bad Doppler measurement accuracy.

**Keyword** TOA, GPS, location system, error analysis, range, Doppler

### 1. まえがき

追尾フィルタは、航空機等の移動物体である目標の位置を観測し、目標の位置、速度などの真値を推定するアルゴリズムである[1]~[5]。この追尾フィルタにおいて、位置のほかに、速度を観測値として使用すれば、追尾性能が改善できる[3],[4]。ただし、速度を観測することにより、位置の観測精度に劣化がないことが前提である。

ところで、TOA (Time of Arrival) 測位は、図1のように、送受信機間の距離を同時に複数観測し、目標の位置を推定する。目標が送信源の場合、位置が既知である受信機で計測した電波伝搬時間より距離を計測する。そして、複数の受信機より得た距離観測値より、目標の位置を推定する。逆に、目標が受信機を搭載している場合、位置が既知である複数の送信源との距離を計測する。なお、後者の代表例は、GPS (Global

Positioning System) である[5]~[12]。

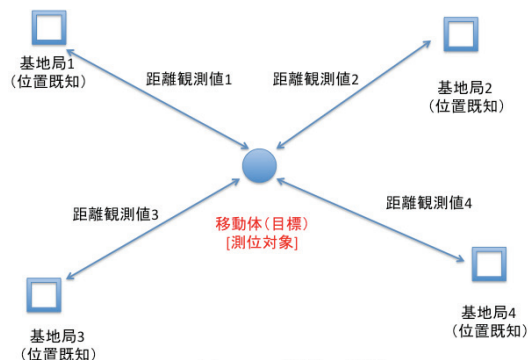


図1 TOA測位の概念

このため、GPS 等でも、距離のほかにドップラーを観測し、三次元の位置と速度を推定すれば、追尾性能が向上する。しかし、TOA 測位では、送受信機の配置

により測位精度が大きく変化し、発散する場合すらある[5],[9]~[12].

ところで、距離もドップラーも、未知数の非線形関数である。したがって、推定は、非線形の連立方程式を解くことと等価となる。この連立方程式を解くため、GPSでは、解の初期値を仮に与え Taylor 展開により線形近似した得た線形モデルに、重み付き最小自乗法[13],[14]を使用し解を算出している（この解法を Taylor 展開推定法と呼ぶ）[5],[9]~[12]. さらに、得られた解を初期値に再設定して同一の処理を繰り返すことで、解の算出精度向上を図っている[5],[9]~[12].

本稿では、Taylor 展開推定法において、距離のみを観測する TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば、距離とドップラーを複数同時に観測し三次元の位置及び速度が必ず推定可能かどうかを明らかにする。また、ドップラーの観測精度や送受信機の配置がどのような場合でも、ドップラーの使用により位置推定精度が改善されるかどうかを明らかにする。

## 2. 目標の位置及び速度の推定

ここでは、 $n$  対の距離及びドップラー観測値から、三次元空間での目標位置及び目標速度を推定する方法について述べる。

### 2.1. 距離の観測モデル

目標とは異なる位置にある  $i(i=1, \dots, n)$  番目の位置ベクトル  $\underline{B}_i$  (既知) を、 $D^T$  は行列  $D$  の転置行列を表すとして、次式で表す。

$$\underline{B}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \quad (1)$$

なお、座標系は、三次元直交座標を使用する。ここで、目標が送信源の場合、 $\underline{B}_i$  は受信機の位置である。目標が受信機を搭載している場合、 $\underline{B}_i$  は送信源の位置である。つぎに、目標の位置を次式で表す。

$$\underline{L} = (x, y, z)^T \quad (2)$$

すると、 $i(i=1, \dots, n)$  番目の送受信機間の距離の真値  $R_i$  は次式となる。

$$R_i = f_i(x, y, z) \quad (3)$$

ここで、次式を定義する。

$$f_i(x, y, z) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \quad (4)$$

すると、 $i(i=1, \dots, n)$  番目の送受信機間の距離の観測値  $R_{io}$  は次式となる。

$$R_{io} = R_i + S + v_i \quad (5)$$

ここで、 $S$  は時計オフセット誤差による距離のバイアス誤差、 $v_i$  はランダムな距離の観測誤差である。

すると、次の式(7)に全微分の公式を使用して、次の性質を得る[5],[6],[9]~[12].

(性質1) 目標の位置推定のための初期値を  $x_0, y_0, z_0$  とすると、次式を得る。

$$\Delta R_{io} \approx \alpha_i(x - x_0) + \beta_i(y - y_0) + \gamma_i(z - z_0) + S + v_i \quad (6)$$

ここで、次式を定義する。

$$\Delta R_{io} = R_{io} - f_i(x_0, y_0, z_0) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{x_i - x_0}{f_i(x_0, y_0, z_0)}, \\ \beta_i &= \frac{\partial f_i}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{y_i - y_0}{f_i(x_0, y_0, z_0)}, \\ \gamma_i &= \frac{\partial f_i}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{z_i - z_0}{f_i(x_0, y_0, z_0)} \end{aligned} \quad (8)$$

### 2.2. ドップラーの観測モデル

目標とは異なる位置にある  $i(i=1, \dots, n)$  番目の速度ベクトル  $\underline{\dot{B}}_i$  (既知) を、式(1)を時間微分して、次式で表す。

$$\underline{\dot{B}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T \quad (9)$$

つぎに、目標の速度ベクトルを、式(2)を時間微分して、次式で表す。

$$\underline{\dot{L}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \quad (10)$$

次の性質は、 $i(i=1, \dots, n)$  番目の送受信機間のドップラーの真値の算出式を示す。

(性質2)  $i(i=1, \dots, n)$  番目の送受信機間のドップラーの真値を  $\dot{R}_i$  とすれば、次式を得る。

$$\dot{R}_i = g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \quad (11)$$

ここで、次式を定義する。

$$g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{(x_i - x)(\dot{x}_i - \dot{x}) + (y_i - y)(\dot{y}_i - \dot{y}) + (z_i - z)(\dot{z}_i - \dot{z})}{f_i(x, y, z)} \quad (12)$$

すると、 $i(i=1, \dots, n)$  番目の送受信機間のドップラーの観測値  $\dot{R}_{io}$  は次式となる。

$$\dot{R}_{io} = \dot{R}_i + \dot{v}_i \quad (13)$$

なお、 $\dot{v}_i$  はドップラーのランダムな観測誤差である。

次の性質は、ドップラーを、目標の位置と速度とで線形近似した結果を示す。

(性質3) 速度推定のための初期値を  $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$  とすると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \Delta \dot{R}_{io} &\approx \alpha_{ii}(x - x_0) + \beta_{ii}(y - y_0) + \gamma_{ii}(z - z_0) \\ &+ \alpha_i(\dot{x} - \dot{x}_0) + \beta_i(\dot{y} - \dot{y}_0) + \gamma_i(\dot{z} - \dot{z}_0) + \dot{v}_i \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、次式を定義する。

$$\Delta \dot{R}_{io} = \dot{R}_{io} - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (15)$$

$$\alpha_{ii} = -\frac{(\dot{x}_i - \dot{x}_0)f_i(x_0, y_0, z_0) - (x_i - x_0)g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{f_i(x_0, y_0, z_0)^2}, \quad (16)$$

$$\beta_{ii} = -\frac{(\dot{y}_i - \dot{y}_0)f_i(x_0, y_0, z_0) - (y_i - y_0)g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{f_i(x_0, y_0, z_0)^2},$$

$$\gamma_{ii} = -\frac{(\dot{z}_i - \dot{z}_0)f_i(x_0, y_0, z_0) - (z_i - z_0)g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{f_i(x_0, y_0, z_0)^2}$$

(証明) 式(13), (11)及び(12)より, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{R}_{io} - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ = g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) + \dot{v}_i \end{aligned} \quad (17)$$

ここで, 全微分の公式を使用して, 式(12)及び(8)より, 次式を得る.

$$\begin{aligned} g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ \approx \alpha_{ii}(x - x_0) + \beta_{ii}(y - y_0) + \gamma_{ii}(z - z_0) \\ + \alpha_i(\dot{x} - \dot{x}_0) + \beta_i(\dot{y} - \dot{y}_0) + \gamma_i(\dot{z} - \dot{z}_0) \end{aligned} \quad (18)$$

ここで, 次式を定義する.

$$\alpha_{ii} = \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (19)$$

$$\beta_{ii} = \frac{\partial g_i}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

$$\gamma_{ii} = \frac{\partial g_i}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$$

式(17)に, 式(15), (18), (19)及び(12)を使用して, 結論を得る. (証明終)

### 2.3. 線形モデル

距離及びドップラー観測値を $n$ 対得るとすれば, 式(6)及び(14)より, 次式の線形観測モデルを得る.

$$\underline{b} = A\underline{a} + \underline{v} \quad (20)$$

ここで,

$$\underline{b} = (\Delta R_{1o}, \dots, \Delta R_{no}, \Delta \dot{R}_{1o}, \dots, \Delta \dot{R}_{no})^T \quad (21)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1l} & \beta_{2l} & \gamma_{2l} & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{nl} & \beta_{nl} & \gamma_{nl} & 0 & \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\underline{a} = (x - x_l^0, y - y_l^0, z - z_l^0, \dot{x} - \dot{x}_l^0, \dot{y} - \dot{y}_l^0, \dot{z} - \dot{z}_l^0)^T \quad (23)$$

$$\underline{v}_l = (v_1, \dots, v_n)^T \quad (24)$$

$$\underline{v}_d = (\dot{v}_1, \dots, \dot{v}_n)^T \quad (25)$$

$$\underline{v} = (\underline{v}_l^T, \underline{v}_d^T)^T \quad (26)$$

で, 行列 $A$ を配置行列と呼ぶことにする. なお, 異なる送受信機間の観測雑音は無相関として, 次式を仮定

する. ここで,  $E[\ ]$ は平均,  $diag\{a_1, \dots, a_n\}$ は対角成分を $a_1, \dots, a_n$ とする対角行列を表す.

$$E[\underline{v}] = \underline{0} \quad (27)$$

$$V = E[\underline{v}\underline{v}^T] = \begin{pmatrix} V_l & V_{ld} \\ V_{ld} & V_d \end{pmatrix} \quad (28)$$

なお,  $i(i=1, \dots, n)$ 番目の送受信機間の距離観測雑音の分散を $\sigma_i^2$ , ドップラー観測雑音の分散を $\sigma_{id}^2$ , 距離とドップラーの観測雑音の相関係数を $\rho_i$ として,

$$V_l = E[\underline{v}_l \underline{v}_l^T] = diag\{\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2\} \quad (29)$$

$$V_d = E[\underline{v}_d \underline{v}_d^T] = diag\{\sigma_{1d}^2, \dots, \sigma_{nd}^2\} \quad (30)$$

$$V_{ld} = E[\underline{v}_l \underline{v}_d^T] = diag\{\rho_i \sigma_i \sigma_{id}, \dots, \rho_n \sigma_n \sigma_{nd}\} \quad (31)$$

である. ここで, 記述を簡単にするため,

$$\underline{\omega}(i) = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \quad (32)$$

$$\underline{\delta}(i) = (\underline{\omega}(i), 1) \quad (33)$$

$$\underline{\kappa}(i) = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, 0) \quad (34)$$

$$A_l = \begin{pmatrix} \underline{\delta}(1)^T & \dots & \underline{\delta}(n)^T \end{pmatrix}^T \quad (35)$$

$$A_{ld} = \begin{pmatrix} \underline{\kappa}(1)^T & \dots & \underline{\kappa}(n)^T \end{pmatrix}^T \quad (36)$$

$$A_d = \begin{pmatrix} \underline{\omega}(1)^T & \dots & \underline{\omega}(n)^T \end{pmatrix}^T \quad (37)$$

とし,  $O_{m,n}$ を $m \times n$ の零行列とすれば, 式(22)より, 次式を得る.

$$A = \begin{pmatrix} A_l & O_{n,3} \\ A_{ld} & A_d \end{pmatrix} \quad (38)$$

また,

$$\underline{\phi}(i) = (\underline{\delta}(i), O_{1,3}) \quad (39)$$

$$\underline{\varphi}(i) = (\underline{\kappa}(i), \underline{\omega}(i)) \quad (40)$$

とすれば, 次式を得る.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{\phi}(1)^T & \dots & \underline{\phi}(n)^T & \underline{\varphi}(1)^T & \dots & \underline{\varphi}(n)^T \end{pmatrix}^T \quad (41)$$

### 2.4. 重み付き最小自乗解

次の性質は, 重み付き線形最小自乗法により, 目標の位置及び速度が算出できることを示す[5], [6], [9]~[12].

(性質4) 式(20)において, 重み付き最小自乗法[13],[14]により, 次式を最小とする $\hat{\underline{a}}$ を推定する.

$$J = (\underline{b} - A\hat{\underline{a}})^T V^{-1} (\underline{b} - A\hat{\underline{a}}) \quad (42)$$

解は、 $A^T V^{-1} A$ が正則ならば、次式である。

$$\hat{\underline{a}} = (A^T V^{-1} A)^{-1} A^T V^{-1} \underline{b} \quad (43)$$

次の性質は、推定値が不偏推定量であることを示すとともに、その推定誤差共分散行列を示す[5], [6], [9]~[12].

(性質5) 式(43)は、次の性質を有する。

$$E[\hat{\underline{a}}] = \underline{a} \quad (44)$$

$$E[(\hat{\underline{a}} - \underline{a})(\hat{\underline{a}} - \underline{a})^T] = (A^T V^{-1} A)^{-1} \quad (45)$$

### 3. 推定可能のための条件

ここでは、重み付き線形最小自乗法により解が算出できるための条件について述べる。

#### 3.1. 解の存在条件

ここで、本稿で使用する前提条件を次に示す。

(前提条件1)  $\underline{\delta}(i)$  ( $i=1, \dots, n$ )のうち、いずれか4個が

1次独立とする。なお、 $4 \leq n$ とする。

次の性質は、式(35)の行列を構成する行ベクトルの1次独立性より、式(37)の行列を構成する行ベクトルの1次独立性が判定できることを示す。

(性質6) 前提条件1が成立するとする。

$\underline{\delta}(i), \underline{\delta}(j), \underline{\delta}(k), \underline{\delta}(l)$  ( $i < j < k < l$ )が1次独立とすれば、 $\underline{\omega}(i), \underline{\omega}(j), \underline{\omega}(k), \underline{\omega}(l)$ のうち、いずれか3個は1次独立である。また、行列 $A$ の階数は7である。

(証明) 行列 $D$ の行列式を $|D|$ とすれば、式(33)より、次式を得る。

$$\begin{vmatrix} \underline{\delta}(i) \\ \underline{\delta}(j) \\ \underline{\delta}(k) \\ \underline{\delta}(l) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \underline{\omega}(j) \\ \underline{\omega}(k) \\ \underline{\omega}(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\omega}(i) \\ \underline{\omega}(k) \\ \underline{\omega}(l) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underline{\omega}(i) \\ \underline{\omega}(j) \\ \underline{\omega}(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\omega}(i) \\ \underline{\omega}(j) \\ \underline{\omega}(k) \end{vmatrix} \quad (46)$$

ここで、 $\underline{\delta}(i), \underline{\delta}(j), \underline{\delta}(k), \underline{\delta}(l)$ が1次独立とする。もし、 $\underline{\omega}(i), \underline{\omega}(j), \underline{\omega}(k), \underline{\omega}(l)$ のいずれも3個も1次従属であれば、

式(46)の右辺の4個の行列式はすべて0である。従って、式(46)は0となり、 $\underline{\delta}(i), \underline{\delta}(j), \underline{\delta}(k), \underline{\delta}(l)$ は1次従属となる。この結果、 $\underline{\omega}(i), \underline{\omega}(j), \underline{\omega}(k), \underline{\omega}(l)$ のうち、いずれか3個は1次独立であり、これを $\underline{\omega}(p), \underline{\omega}(q), \underline{\omega}(r)$ とする。

ここで、

$$\begin{aligned} a_1 \underline{\phi}(i) + a_2 \underline{\phi}(j) + a_3 \underline{\phi}(k) + a_4 \underline{\phi}(l) \\ + b_1 \underline{\varphi}(p) + b_2 \underline{\varphi}(q) + b_3 \underline{\varphi}(r) = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

とすると、式(39)及び(40)より次式を得る。

$$b_1 \underline{\omega}(p) + b_2 \underline{\omega}(q) + b_3 \underline{\omega}(r) = 0 \quad (48)$$

式(48)及び $\underline{\omega}(p), \underline{\omega}(q), \underline{\omega}(r)$ は1次独立より、次式を得る。

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0 \quad (49)$$

式(47)に式(49)を代入し、式(39)を使用すれば、次式を得る。

$$a_1 \underline{\delta}(i) + a_2 \underline{\delta}(j) + a_3 \underline{\delta}(k) + a_4 \underline{\delta}(l) = 0 \quad (50)$$

式(50)及び $\underline{\delta}(i), \underline{\delta}(j), \underline{\delta}(k), \underline{\delta}(l)$ は1次独立より、次式を得る。

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \quad (51)$$

式(47)に、式(49)及び(51)を使用して、

$\underline{\phi}(i), \underline{\phi}(j), \underline{\phi}(k), \underline{\phi}(l), \underline{\varphi}(p), \underline{\varphi}(q), \underline{\varphi}(r)$ は1次独立である。従って、 $2n \times 7$ の行列 $A$ の階数は7である。(証明終)

次の性質で $Q = V^{-1}$ の場合を考えれば、観測雑音共分散行列 $V$ が正値対称行列のとき、行列 $A_i$ の行ベクトルにより、 $A^T V^{-1} A$ の逆行列が算出可能かを判定できることを示す。なお、証明は、文献[12]の性質4と同様である。

(性質7) 前提条件1が成立するとする。また、 $Q$ は、 $2n \times 2n$ の任意の正値対称行列とする。このとき、 $A^T Q A$ は正則である。逆に、行列 $A$ の階数が6以下であれば、 $A^T Q A$ は正則ではない。

式(32)の $\underline{\omega}(i)$ は、式(8)及び(4)が示すように、送信機と受信機の相対的な位置関係で決まる単位ベクトルである。このため、 $\underline{\omega}(i)$ のみを使用して、 $2n \times 2n$ の正値対称行列 $Q$ に対して、 $A^T Q A$ の逆行列が算出可能を判定できれば、幾何学的な意味が理解しやすくなる。

次の性質は、 $\underline{\omega}(i)$ を使用して、 $A^T Q A$ の逆行列が算出可能かを判定できることを示す。

(性質8)  $Q$ は、 $2n \times 2n$ の任意の正値対称行列とする。また、 $k$ は、 $1, \dots, n$ のいずれかとする。このとき、 $\underline{\omega}(i) - \underline{\omega}(k)$  ( $i=1, \dots, n, i \neq k$ )のうち、いずれか3個が1次独立であれば、 $A^T Q A$ は正則である。なお、 $4 \leq i$ とする。

(証明) 式(32)及び(33)より、次式を得る。

$$\begin{vmatrix} \underline{\delta}(j_1) \\ \underline{\delta}(j_2) \\ \underline{\delta}(j_3) \\ \underline{\delta}(j_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\omega}(j_1) - \underline{\omega}(j_4) \\ \underline{\omega}(j_2) - \underline{\omega}(j_4) \\ \underline{\omega}(j_3) - \underline{\omega}(j_4) \end{vmatrix} \quad (52)$$

式(52)において、最初の行列式が0ではないことと、最後の行列式が0ではないこととは等価である。この結果、性質7より、結論を得る。(証明終)

#### 3.2. 観測雑音共分散行列の性質

重み付き線形最小自乗法を使用するには、観測雑音共分散行列 $v$ が正値でなければならない。次の性質は、 $v$ が正値となる条件を示す。なお、 $D > 0$ は行列 $D$ が正値対称行列、 $D \geq 0$ は行列 $D$ が半正値対称行列を表す。

(性質9)  $\sigma_i > 0, \sigma_{id} > 0, |\rho_i| < 1$  ( $i=1, \dots, n$ )ならば、次式が成立する。

$$V > 0 \quad (53)$$

### 4. ドップラー観測による位置推定精度

ここでは、距離のみ観測のTOAと、距離及びドップラー観測のTOAの位置推定精度を比較する。

#### 4.1. 距離のみを観測する場合の TOA

距離観測値を  $n$  個得るとすれば、式(6)及び(24)を使用して、次式の線形観測モデルを得る。

$$\underline{b}_i = A_i \underline{a}_i + \underline{v}_i \quad (54)$$

ここで、

$$\underline{b}_i = (\Delta R_{i0}, \dots, \Delta R_{in})^T \quad (55)$$

$$\underline{a}_i = (x - x_0, y - y_0, z - z_0, S)^T \quad (56)$$

である。なお、次式を仮定する

$$V_i = E[\underline{v}_i \underline{v}_i^T] > 0 \quad (57)$$

次の性質は、重み付き線形最小自乗法により、目標の位置が算出できることを示す[5],[6],[9]~[12]。

(性質 1 0) 式(54)において、重み付き最小自乗法[13],[14]により、次式を最小とする  $\hat{\underline{a}}_i$  を推定する。

$$J_i = (\underline{b}_i - A_i \hat{\underline{a}}_i)^T V_i^{-1} (\underline{b}_i - A_i \hat{\underline{a}}_i) \quad (58)$$

解は、 $A_i^T V_i^{-1} A_i$  が正則ならば、次式である。なお、前提条件 1 が成立するならば、 $A_i^T V_i^{-1} A_i$  は正則である[12]。

$$\hat{\underline{a}}_i = (A_i^T V_i^{-1} A_i)^{-1} A_i^T V_i^{-1} \underline{b}_i \quad (59)$$

性質 1 0 と性質 7 は、距離のみ観測の TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば、距離とドップラーを複数同時に観測の TOA でも、三次元の位置及び速度が推定可能なことを示す。

次の性質は、推定値が不偏推定量であることを示すと同時に、その推定誤差共分散行列を示す。

(性質 1 1) 前提条件 1 が成立するならば、式(59)は、次の性質を有する。

$$E[\hat{\underline{a}}_i] = \underline{a}_i \quad (60)$$

$$E[(\hat{\underline{a}}_i - \underline{a}_i)(\hat{\underline{a}}_i - \underline{a}_i)^T] = (A_i^T V_i^{-1} A_i)^{-1} > 0 \quad (61)$$

#### 4.2. ドップラー観測の場合の測位精度

まず、 $n \times n$  の単位行列を  $I_n$  として、

$$L = \begin{pmatrix} I_n & 0 I_n \end{pmatrix} \quad (62)$$

とすれば、式(55)と(21)、式(56)と(26)をそれぞれ比較して、次式を得る。

$$\underline{b}_i = L \underline{b} \quad (63)$$

$$\underline{v}_i = L \underline{v} \quad (64)$$

つぎに、

$$N = \begin{pmatrix} I_4 & 0_{4,3} \end{pmatrix} \quad (65)$$

とすれば、式(23)と(56)を比較して、次式を得る。

$$\underline{a}_i = N \underline{a} \quad (66)$$

すると、

$$\hat{\underline{a}}_D = N \hat{\underline{a}} \quad (67)$$

は、距離及びドップラー観測の場合の位置及び距離のバイアス誤差の推定値である。

次の性質は、距離及びドップラーを観測する場合の重み付き最小自乗法による測位が不偏推定量であることを示すと同時に、その推定誤差共分散行列を示す。

(性質 1 2) 式(67)は、次の性質を有する。

$$E[\hat{\underline{a}}_D] = \underline{a}_i \quad (68)$$

$$E[(\hat{\underline{a}}_D - \underline{a}_i)(\hat{\underline{a}}_D - \underline{a}_i)^T] = N(A^T V^{-1} A)^{-1} N^T \quad (69)$$

#### 4.3. 性能比較

次の性質は、式(69)及び(61)より、距離及びドップラー観測するシステムの位置推定精度は、距離のみを観測する TOA よりも改善可能であることを示す。

(性質 1 3) 前提条件 1 が成立するとともに、 $\sigma_i > 0, \sigma_{id} > 0, |\rho_i| < 1$  ( $i=1, \dots, n$ ) とすると、次式を得る。

$$N(A^T V^{-1} A)^{-1} N^T \leq [A_i^T V_i^{-1} A_i]^{-1} \quad (70)$$

#### 4.4. 数値例

距離及びドップラー観測の場合と、距離のみ観測の場合の位置推定精度が、常に同一でも、式(70)は成立する。このため、ここでは、ドップラーの使用により位置推定精度が改善する例を次に示す。

(例) 簡単のため、二次元の  $x-y$  平面で考える。また、距離の観測雑音の分散は  $0.01$ 、ドップラーの観測雑音の分散は  $a^2$ 、距離とドップラーは無相関、距離バイアスは存在するとし未知数とし、測位計算のための初期値は真値とする。

ここで、送信機を有する目標の位置  $\underline{L}$  及び受信機  $\underline{B}_i$  ( $i=1,2,3$ ) の位置を次式とする。なお、図 2 に、目標と、受信局の配置を示す。

$$\underline{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{B}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (71)$$

また、それらの速度ベクトルを、次式とする。

$$\dot{\underline{B}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\underline{B}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\underline{B}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (72)$$

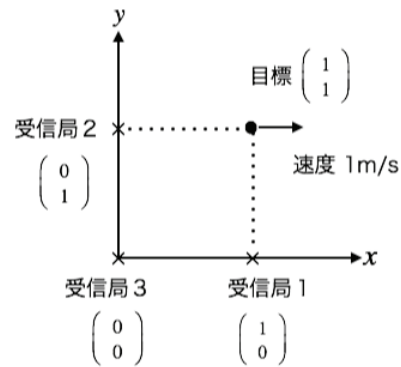


図2 目標と受信局の配置

すると、式(38)及び(35)~(37)は、次式となる。



$$A = \begin{pmatrix} A_l & O_{3,2} \\ A_{ld} & A_3 \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$A_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$A_{ld} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (76)$$

従って、距離のみ観測の場合と、距離及びドップラー観測の場合の位置推定誤差の分散をそれぞれ  $P_l, P_{ld}$  とすれば、 $x, y$  座標とも次式となる。

$$P_l = 0.01(3\sqrt{2} + 5) \quad (77)$$

$$P_{ld} = \frac{0.01}{16a^2 + 0.01} \cdot \frac{24a^2 + 0.01}{2} \quad (78)$$

$$+ \frac{0.01}{8(3\sqrt{2} - 4)a^2 + 3\sqrt{2} \cdot 0.01} \cdot \frac{32(3\sqrt{2} + 4)a^4}{16a^2 + 0.01}$$

式(77)及び(78)より、次式を得る。

$$P_l > P_{ld} \quad (79)$$

$$P_{ld} \rightarrow P_l \quad (a^2 \rightarrow \infty) \quad (80)$$

$$P_{ld} \rightarrow 0.01/2 \quad (a^2 \rightarrow 0) \quad (81)$$

式(79)は、距離及びドップラーを観測する場合の位置推定精度は、距離のみを観測する場合の位置推定精度よりよいことを示す。

式(80)は、速度誤差の分散が極めて大きいとき、両者に差がないことを示す。

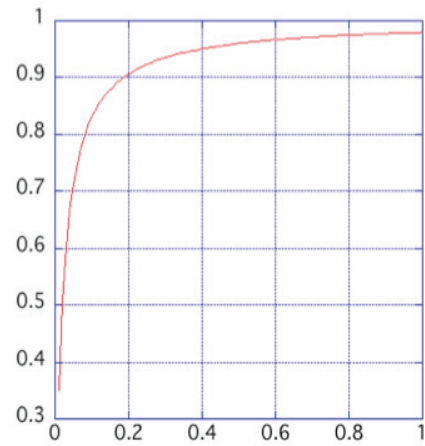
式(81)は、速度誤差の分散が極めて小さいとき、距離の観測雑音の半分が推定誤差の分散であることを示す。

なお、次の図3に、ドップラー使用と未使用の場合の位置推定誤差の分散の比  $P_{ld}/P_l$  を示す。

## 5. むすび

本稿では、距離のみを観測する TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば、距離とドップラーを複数同時に観測し、三次元の位置及び速度を推定することも可能なことを示した。また、ドップラーの観測精度や送受信機の配置がどのような場合でも、ドップラーの使用による位置推定精度の劣化はないことを示した。以上の結果、ドップラーの使用は、どのような状況でも、

常に有効なことが分かった。



ドップラー観測雑音の分散 ( $a^2$ )

図3 位置推定誤差分散の比  
(ドップラー使用/未使用)

## 文 献

- [1] S.S.Blackman. and R.Popoli, Design and Analysis of Modern Tracking Systems, ArtechHouse, Boston, 1999.
- [2] 小菅義夫, “レーダによる単一目標追尾法の現状と将来,” 信学論(B), vol. J93-B, no.11, pp.1504-1511, Nov. 2010.
- [3] 小菅義夫, “位置及び速度を観測値とする六次元カルマンフィルタの過渡応答,” 信学論(B), vol. J96-B, no.11, pp.1294-1303, Nov. 2013.
- [4] 小菅義夫, “位置及び速度を観測値とする九次元カルマンフィルタの過渡応答,” 信学論(B), vol. J97-B, no7, pp.-, July. 2014.
- [5] Y.Bar-Shalom, X.R.Li and T.Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [6] 佐田達典, G P S 測量技術, オーム社, 東京. 2003.
- [7] 西谷芳雄, 電波計器, 成山堂書店, 東京. 2002.
- [8] 安田明生, “GPS の現状と展望,” 信学誌, vol.82 no.12, pp.1207-1215, Dec. 1999.
- [9] M.S.Grewal, L.R.Weill, A.P.Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.
- [10] 福島荘之介, 理解するための GPS 測位計算プログラム入門 (その3) 測位計算のはなし, 航空無線, no.36, 夏期, 2003.
- [11] 坂井 丈泰, GPS 技術入門, 東京電機大学出版局, 東京, 2003.
- [12] 小菅義夫, “特異値による T O A 測位精度の解析,” 信学論(B), vol. J97-B, no3, pp.-333-340, March. 2014.
- [13] A.Gelb,ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.
- [14] 中川 徹, 小柳義夫, 最小二乗法による実験データ解析, 東京大学出版界, 東京, 1982.