論　文

ドップラー観測値を併用するTDOAの位置・速度推定

小菅　義夫[†,††]　古賀　禎[†]　宮崎　裕己[†]　秋田　学[††]
稲葉　敬之[††]

Estimation of Location and Velocity Using TDOA and Doppler Observations

Yoshio KOSUGE[†,††], Tadashi KOGA[†], Hiromi MIYAZAKI[†], Manabu AKITA[††],
and Takayuki INABA[††]

あらまし　航空機等の目標からの送信電波を，地上の複数の受信局で受信して，目標の位置及び速度を推定する方法について述べる．各受信局は，受信時刻，周波数が計測可能とする．なお，送信時刻は不明であるが，送信周波数は既知とする．この場合，異なる位置にある 4 カ所以上の受信局間の電波到達時刻差（距離差）を使用して，移動体の位置が推定できる．ただし，この TDOA（Time Difference of Arrival）測位では，送受信機の配置により測位精度が大きく変化し，発散する場合すらある．また，ドップラー効果を利用し，各受信局で，目標の距離変化率（ドップラー）が計測できる．本論文では，Taylor 展開推定法により三次元の位置及び速度を推定する二つの方法を提案し比較した．逐次法は，距離差のみで位置を推定したのち，この推定結果とドップラーを使用して速度を推定する．同時法は，距離差とドップラーを使用して，位置と速度を同時に推定する．比較した結果，速度推定精度は両者で同一であるが，位置推定精度は，同時法が優れていることが分かった．更に，送受信機の配置より定まる行列の最小特異値を使用した推定誤差上界の算出式を示した．

キーワード　TDOA，測位，特異値，誤差解析，距離差観測値，ドップラー観測値

1. まえがき

航空機等の移動物体である目標から送信された電波を，地上に設置された複数の受信局で受信して，目標の位置及び速度を推定するシステムについて考察する．なお，各受信局では，受信時刻，周波数が計測可能とする．また，送信時刻は不明であるが，送信周波数は既知とする．したがって，目標の有する送信機に，送信時刻の付加などの新たな機能追加は不要である．

なお，TDOA（Time Difference of Arrival）測位では，基準局と異なる位置に配置された 3 カ所以上の受信局で受信した移動体からの電波の受信時刻と，基準局での受信時刻の差である電波到達時刻差を使用して，移動体の位置を推定する [1]～[3]．

例えば，WAM（Wide Area Multilateration）は，空港周辺の航空機を，従来のレーダより，高精度かつ高サンプルレートで監視することを目的としたシステムである [1]～[3]．

一方，TOA（Time of Arrival）は，距離の観測値を使用して，移動体の位置を推定する [4]～[7]．例えば，GPS（Global Positioning System）は，高精度の送信時刻を使用した TOA である．しかし，TDOA 測位では送信時刻が不要である．

なお，距離も距離差も，未知数である三次元の位置の非線形関数である．このため，TOA や TDOA では，Taylor 展開により線形近似した得た線型モデルに，重み付き最小自乗法を使用して解を算出する方法（Taylor 展開推定法と呼ぶ）が使用されている [1]～[8]．

しかし，TDOA 測位では，送受信機の配置により測位精度が大きく変化し，発散する場合すらある [1]～[3]．なお，ドップラー効果を利用することにより，各受信局で，目標の距離変化率（ドップラー）が計測できる．このドップラーを併用した TDOA 測位性能の改善が提案されている [9]．ただし，提案は，水平面内での速度及び方位角が既知であることを前提にしてお

† 国立研究開発法人電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaiji-higashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan
†† 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Information and Engineering, University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan

り，適用範囲に限界がある．また，文献 [9] は，三次元の速度推定は行っていない．

本論文では，Taylor 展開推定法において，距離差とドップラーを複数同時に観測し，三次元の位置及び速度を推定する二つの方法を比較する．一つ目は，距離差のみを観測する TDOA で位置を推定したのち，この推定結果とドップラーを使用して速度を推定する逐次法である．逐次法は，ドップラーの使用による速度推定が，位置推定に悪影響を及ぼさないとの利点がある．二つ目は，距離差とドップラーを使用して，位置と速度を同時に推定する同時法である．同時法では，ドップラーの使用が，位置推定に悪影響するか否かを明らかにする必要がある．また，送受信機の配置より定まる行列の最小特異値を使用した推定誤差上界の算出式を示す．

2. 目標位置の推定

ここでは，n 個の電波到達時刻差（距離差）から，三次元の目標位置を推定する方法について述べる．

2.1 距離差の観測モデル

受信局は基準局を含め n + 1 個あるとし，i ($i = 0, \cdots, n$) 番目の受信局（固定位置）の位置ベクトル $\underline{B}_i$（既知）を，D^T は行列 D の転置行列を表すとして，次式で表す．なお，$i = 0$ の受信局を基準局と呼ぶ．

$$\underline{B}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \tag{1}$$

座標系は，三次元直交座標を使用する．

一方，移動体（電波送信元）の位置ベクトル（未知）の真値を次式で表す．

$$\underline{L} = (x_l, y_l, z_l)^T \tag{2}$$

すると，移動体から i 番目の受信局までの距離の真値 R_i は次式となる．

$$R_i = f_i(x_l, y_l, z_l) \tag{3}$$

ここで，次式を定義する．

$$f_i(x, y, z) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \tag{4}$$

すると，移動体から i 番目の受信局と，移動体から基準局までの距離差の観測値 R_{i0o}，その観測誤差 v_i は次式で得られる．

$$R_i - R_0 + v_i = R_{i0o} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{5}$$

次の性質は，距離差を移動体の位置で線形近似した結果を示す [1].

（性質 1）移動体の位置推定のための初期値を x_l^0，y_l^0，z_l^0 とすると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\Delta R_{i0o} &\approx (\alpha_i - \alpha_0)(x_l - x_l^0) + (\beta_i - \beta_0)(y_l - y_l^0) \\ &+ (\gamma_i - \gamma_0)(z_l - z_l^0) + v_i\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta R_{i0o} = R_i - R_0 + v_i - g_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0) \tag{7}$$

$$g_i(x, y, z) = f_i(x, y, z) - f_0(x, y, z) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\alpha_i &= -\frac{x_i - x_l^0}{f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0)}, \quad \beta_i = -\frac{y_i - y_l^0}{f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0)} \\ \gamma_i &= -\frac{z_i - z_l^0}{f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0)}\end{aligned} \tag{9}$$

2.2 線形モデル

n + 1 個の受信局で受信するとすれば，式 (6) より，次式の線形観測モデルを得る [1].

$$\underline{b}_l = A_l \underline{a}_l + \underline{v}_l \tag{10}$$

ここで，

$$\underline{b}_l = (\Delta R_{10o}, \cdots, \Delta R_{n0o})^T \tag{11}$$

$$\underline{a}_l = (x - x_l^0, y - y_l^0, z - z_l^0)^T \tag{12}$$

$$\underline{v}_l = (v_1, \cdots, v_n)^T \tag{13}$$

で，また，式 (9) を使用して，

$$\underline{\omega}(i) = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{pmatrix} \tag{14}$$

とし，次式を定義する．

$$A_l = \begin{pmatrix} [\underline{\omega}(1) - \underline{\omega}(0)]^T & \cdots & [\underline{\omega}(n) - \underline{\omega}(0)]^T \end{pmatrix}^T \tag{15}$$

なお，行列 A_l を TDOA の配置行列と呼ぶ．更に，$E[\ ]$ は平均を表すとして，次式が仮定できる [1].

$$E[\underline{v}_l] = \underline{0} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}V_l &= E\left[\underline{v}_l \, \underline{v}_l^T\right] \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma_2^2 + \sigma_0^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 & \sigma_n^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{17}$$

ここで，光の速さを c，受信局 i のランダムな受信機時計誤差を ε_i，その分散を ρ_i^2 とすれば，$\sigma_i^2 = c^2\rho_i^2$ で，次式の関係を有する [1].

$$v_i = c(\varepsilon_i - \varepsilon_0) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{18}$$

なお，TOA の場合とは異なり，式 (17) は対角行列ではない．しかし，次の性質が示すように，V_l は正則行列である [1]．なお，$D > 0$ は行列 D が正値対称行列，$D \geq 0$ は行列 D が半正値対称行列を表す．

（性質 2）$\sigma_i^2 > 0$ $(i = 0, \cdots, n)$ とすれば，次式を得る．

$$V_l > 0 \tag{19}$$

2.3 重み付き最小自乗解

次の性質は，重み付き線形最小自乗法 [10], [11] により，目標の位置が算出できることを示す [1].

（性質 3）式 (10) において，重み付き最小自乗法により，次式を最小とする $\underline{\hat{a}}_l$ を推定する．

$$J_l = (\underline{b}_l - A_l\underline{\hat{a}}_l)^T V_l^{-1}(\underline{b}_l - A_l\underline{\hat{a}}_l) \tag{20}$$

解は，$A_l^T V_l^{-1} A_l$ が正則ならば，次式である．

$$\underline{\hat{a}}_l = (A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} A_l^T V_l^{-1} \underline{b}_l \tag{21}$$

次の性質は，算出した目標位置が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す [1].

（性質 4）式 (21) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}_l] = \underline{a}_l \tag{22}$$
$$E\Big[(\underline{\hat{a}}_l - \underline{a}_l)(\underline{\hat{a}}_l - \underline{a}_l)^T\Big] = (A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} > 0 \tag{23}$$

2.4 重み付き最小自乗解の性質

ここでは，距離差とドップラー観測値を併用した場合の目標位置推定法との比較に使用する式 (21) の特徴について述べる．

ここで，本論文に使用する前提条件を次に示す．

（前提条件 1）$\underline{\omega}(i) - \underline{\omega}(0)$ $(i = 1, \cdots, n)$ のうち．いずれか 3 個が 1 次独立とする．なお，$3 \leq n$ とする．

次の性質で $P = V_l^{-1}$ の場合を考えれば，行列 A_l の行ベクトルにより，$A_l^T V_l^{-1} A_l$ の逆行列が算出可能かを判定できることを示す．

（性質 5）P は，$(n+1) \times (n+1)$ の任意の正値対称行列とする．すると，前提条件 1 が成立するときのみ，$A_l^T P A_l$ は正値対称行列である．

（証明）仮定より $A_l^T P A_l$ は半正値である．ここで，ベクトル $\underline{l}$ と $\underline{m}$ の内積を $(\underline{l}, \underline{m})$ とする．すると，任意の三次元ベクトル $\underline{x}$ に対して，次式を得る．

$$(A_l^T P A_l \underline{x}, \underline{x}) = (P A_l \underline{x}, A_l \underline{x}) \tag{24}$$

したがって，

$$(A_l^T P A_l \underline{x}, \underline{x}) = 0 \tag{25}$$

とすれば，式 (24) 及び P は正値の仮定より，次式を得る．

$$A_l \underline{x} = \underline{0} \tag{26}$$

前提条件 1 が成立するとき，式 (15) より A_l の階数は 3 であるため，次式を得る．この結果，$A_l^T P A_l$ は正値である．

$$\underline{x} = \underline{0} \tag{27}$$

逆に，前提条件 1 が成立しないとき，A_l の階数は 2 以下であるため，式 (27) を満たさない式 (26) の解があり，$A_l^T P A_l$ は正値ではない．（証明終）

次の性質は，推定誤差を評価するのに使用する．なお，$n \times n$ の単位行列を I_n と書く．

（性質 6）次式を得る．

$$V_l \leq \Big[\sigma_{\max}^2 + n\sigma_0^2\Big] I_n \tag{28}$$

ここで，次式を定義する．

$$\sigma_{\max}^2 = \max. \sigma_i^2 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{29}$$

（証明）まず，次式を定義する．

$$V_{l\max} = \begin{pmatrix} \sigma_{\max}^2 + \sigma_0^2 & \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \sigma_{\max}^2 + \sigma_0^2 & \ddots & \sigma_0^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_0^2 \\ \sigma_0^2 & \cdots & \sigma_0^2 & \sigma_{\max}^2 + \sigma_0^2 \end{pmatrix} \tag{30}$$

式 (17) 及び (30) より，式 (29) を使用して，次式を得る．

$$V_l \leq V_{l\max} \tag{31}$$

式 (31) 及び付録の補題を使用して，式 (28) を得る．（証明終）

次の性質は，式 (23) の推定誤差の上界を示す．

（性質 7）前提条件 1 が成立するとする．また，A_l の最小特異値を $\lambda_{l,\min}$（$A_l^T A_l$ の最小固有値の平方根と

等価 [11]）とする．すると，次式を得る．

$$\left[A_l^T V_l^{-1} A_l\right]^{-1} \leq (\sigma_{\max}^2 + n\sigma_0^2)/\lambda_{l,\min}^2 \cdot I_3 \quad (32)$$

（証明）性質 5 より $A_l^T A_l$ は正値であるので，$A_l^T A_l$ の固有値は全て正である．したがって，次式を得る．

$$0 < \lambda_{l,\min}^2 I_3 \leq A_l^T A_l \quad (33)$$

ここで，次式を得る．

$$(A_l^T V_l^{-1} A_l \underline{x}, \underline{x}) = (V_l^{-1} A_l \underline{x}, A_l \underline{x}) \quad (34)$$

式 (28) 及び (34) より，次式を得る．

$$\frac{1}{(\sigma_{\max}^2 + n\sigma_0^2)}(A_l \underline{x}, A_l \underline{x}) \leq (A_l^T V_l^{-1} A_l \underline{x}, \underline{x}) \quad (35)$$

式 (33) 及び (35) より，次式を得る．

$$0 < \frac{\lambda_{l,\min}^2}{(\sigma_{\max}^2 + n\sigma_0^2)}(\underline{x}, \underline{x}) \leq (A_l^T V_l^{-1} A_l \underline{x}, \underline{x}) \quad (36)$$

式 (36) より，式 (32) を得る．（証明終）

3. 目標位置・速度の推定

ここでは，n 個の電波到達時刻差（距離差）及び n + 1 個のドップラーから，三次元の目標位置及び目標速度を推定する方法について述べる．

3.1 ドップラーの観測モデル

目標の速度ベクトルを，式 (2) を時間微分して，次式で表す．

$$\underline{\dot{L}} = (\dot{x}_l, \dot{y}_l, \dot{z}_l)^T \quad (37)$$

次の性質は，目標のドップラー真値算出式を示す．なお，証明は，受信局は固定位置にあるとの仮定より，式 (4) を時間 t で微分して得られる．

（性質 8）i 番目の受信機が計測する目標のドップラーの真値を $\dot{R}_i$ とすれば，次式を得る．

$$\dot{R}_i = h_i(x_l, y_l, z_l, \dot{x}_l, \dot{y}_l, \dot{z}_l) \quad (38)$$

ここで，次式を定義する．

$$h_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -\frac{(x_i - x)\dot{x} + (y_i - y)\dot{y} + (z_i - z)\dot{z}}{f_i(x, y, z)} \quad (39)$$

すると，i 番目の送受信機間のドップラーの観測値 $\dot{R}_{io}$，その観測誤差 $\dot{v}_i$ は次式で得られる．

$$\dot{R}_{io} = \dot{R}_i + \dot{v}_i \quad (40)$$

次の性質は，ドップラーを，目標の位置と速度とで線形近似した結果を示す．

（性質 9）速度推定のための初期値を $\dot{x}_l^0$，$\dot{y}_l^0$，$\dot{z}_l^0$ とすると，次式を得る．

$$\Delta\dot{R}_{io} \approx \alpha_{il}(x_l - x_l^0) + \beta_{il}(y_l - y_l^0) + \gamma_{il}(z_l - z_l^0) + \alpha_i(\dot{x}_l - \dot{x}_l^0) + \beta_i(\dot{y}_l - \dot{y}_l^0) + \gamma_i(\dot{z}_l - \dot{z}_l^0) + \dot{v}_i \quad (41)$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta\dot{R}_{io} = \dot{R}_{io} - h_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0, \dot{x}_l^0, \dot{y}_l^0, \dot{z}_l^0) \quad (42)$$

$$\alpha_{il} = \frac{\dot{x}_l^0 f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0) + (x_i - x_l^0) h_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0, \dot{x}_l^0, \dot{y}_l^0, \dot{z}_l^0)}{f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0)^2},$$

$$\beta_{il} = \frac{\dot{y}_l^0 f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0) + (y_i - y_l^0) h_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0, \dot{x}_l^0, \dot{y}_l^0, \dot{z}_l^0)}{f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0)^2}, \quad (43)$$

$$\gamma_{il} = \frac{\dot{z}_l^0 f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0) + (z_i - z_l^0) h_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0, \dot{x}_l^0, \dot{y}_l^0, \dot{z}_l^0)}{f_i(x_l^0, y_l^0, z_l^0)^2}$$

3.2 ドップラーの線形モデル

n+1 個の受信局で受信するとすれば，式 (41)，(12) 及び (14) より，次式の線形観測モデルを得る．

$$\underline{b}_d = A_{ld}\underline{a}_l + A_d \underline{a}_d + \underline{v}_d \quad (44)$$

ここで，

$$\underline{b}_d = (\Delta\dot{R}_{0o}, \cdots, \Delta\dot{R}_{no})^T \quad (45)$$

$$A_d = \begin{pmatrix} \underline{\omega}(0)^T & \cdots & \underline{\omega}(n)^T \end{pmatrix}^T \quad (46)$$

$$\underline{a}_d = (\dot{x} - \dot{x}_l^0, \dot{y} - \dot{y}_l^0, \dot{z} - \dot{z}_l^0)^T \quad (47)$$

$$\underline{v}_d = (\dot{v}_0, \cdots, \dot{v}_n)^T \quad (48)$$

で，また，

$$\underline{\kappa}(i) = \begin{pmatrix} \alpha_{il} & \beta_{il} & \gamma_{il} \end{pmatrix} \quad (49)$$

として，次式を定義する．

$$A_{ld} = \begin{pmatrix} \underline{\kappa}(0)^T & \cdots & \underline{\kappa}(n)^T \end{pmatrix}^T \quad (50)$$

また，次式を仮定する．

$$E[\dot{v}_i] = 0 \quad (i = 0, \cdots, n) \quad (51)$$

$$E[\dot{v}_i \dot{v}_j] = \dot{\sigma}_i^2 \ (i = j);\ 0 \ (i \neq j) \quad (52)$$

すると，$diag\{a_0, \cdots, a_n\}$ は対角成分を $a_0, \cdots, a_n$

とする対角行列を表すとすれば，式 (48) より，次式を得る．

$$E[\underline{v}_d] = \underline{0} \tag{53}$$

$$V_d = E\left[\underline{v}_d \underline{v}_d^T\right] = diag\{\dot{\sigma}_0^2, \cdots, \dot{\sigma}_n^2\} > 0 \tag{54}$$

3.3 距離差・ドップラーの線形モデル

n + 1 個の受信局で受信するとすれば，式 (10) 及び (44) より，次式の線形観測モデルを得る．

$$\underline{b} = A\underline{a} + \underline{v} \tag{55}$$

ここで，$O_{m,n}$ を $m \times n$ の零行列を表すとすれば，

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} \underline{b}_l^T & \underline{b}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{56}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_l & O_{n,3} \\ A_{ld} & A_d \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} \underline{a}_l^T & \underline{a}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{58}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{v}_l^T & \underline{v}_d^T \end{pmatrix}^T \tag{59}$$

である．なお，行列 A を配置行列と呼ぶ．

また，距離差とドップラーの観測誤差は，無相関として，次式を仮定する．

$$E[v_i \dot{v}_j] = 0 \quad (i = 1, \cdots, n;\ j = 0, \cdots, n) \tag{60}$$

すると，式 (16)，(53) 及び (17)，(54)，(60) より，式 (59) を使用して，次式を得る．

$$E[\underline{v}] = \underline{0} \tag{61}$$

$$V = E\left[\underline{v}\,\underline{v}^T\right] = \begin{pmatrix} V_l & O_{n,n+1} \\ O_{n+1,n} & V_d \end{pmatrix} \tag{62}$$

3.4 配置行列の性質

次の性質は，式 (15) の行列を構成する行ベクトルの 1 次独立性より，式 (46) の行列を構成する行ベクトルの 1 次独立性が判定できることを示す．

（性質 10）前提条件 1 が成立しているとする．また，$\underline{\omega}(i) - \underline{\omega}(0)$，$\underline{\omega}(j) - \underline{\omega}(0)$，$\underline{\omega}(k) - \underline{\omega}(0)$ が 1 次独立とする．すると，$\underline{\omega}(i)$，$\underline{\omega}(j)$，$\underline{\omega}(k)$，$\underline{\omega}(0)$ $(1 \leq i < j < k \leq n)$ のいずれか 3 個は 1 次独立である．また，行列 A_d の階数は 3，行列 A の階数は 6 である．

（証明）まず，$\underline{a} = \underline{\omega}(i)^T$，$\underline{b} = \underline{\omega}(j)^T$，$\underline{c} = \underline{\omega}(k)^T$，$\underline{d} = \underline{\omega}(0)^T$ において，$\underline{a} - \underline{d}$，$\underline{b} - \underline{d}$，$\underline{c} - \underline{d}$ が 1 次独立ならば，$\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$，$\underline{d}$ のうち，いずれか 3 個が 1 次独立であることを示す．このためには，$\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$，$\underline{d}$ のいずれの 3 個も 1 次従属として，矛盾を示せばよい．

ここで，$|D|$ は，行列 D の行列式を表すとする．すると，$\underline{a} - \underline{d}$，$\underline{b} - \underline{d}$，$\underline{c} - \underline{d}$ が 1 次独立ならば，次式を得る．

$$\begin{vmatrix} \underline{a} - \underline{d} & \underline{b} - \underline{d} & \underline{c} - \underline{d} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{63}$$

一方，$\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$，$\underline{d}$ いずれの 3 個も 1 次従属ならば，次式を得る．

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & \underline{d} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{c} & \underline{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{b} & \underline{c} & \underline{d} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{64}$$

同一の列ベクトルを有する行列の行列式は 0 及び式 (64) を使用し，次式を得る．

$$\begin{vmatrix} \underline{a} - \underline{d} & \underline{b} - \underline{d} & \underline{c} - \underline{d} \end{vmatrix} = 0 \tag{65}$$

式 (63) と，式 (65) は矛盾しており，$\underline{a}$，$\underline{b}$，$\underline{c}$，$\underline{d}$ のうち，いずれか 3 個が 1 次独立である．この結果，$\underline{\omega}(i)$，$\underline{\omega}(j)$，$\underline{\omega}(k)$，$\underline{\omega}(0)$ のうち，いずれか 3 個は 1 次独立である．したがって，$(n+1) \times 3$ の式 (46) の行列 A_d の階数は 3 である．更に，仮定より A_l の階数は 3 であるので，式 (57) の行列 A の階数は 6 である．（証明終）

次の性質は，距離差とドップラーを観測値として，目標位置及び速度を推定する場合の解の存在条件を示すのに使用する．なお，証明は，性質 10 を使用すれば，性質 5 と同様である．

（性質 11）Q は，$(2n+1) \times (2n+1)$ の任意の正値対称行列とする．すると，前提条件 1 が成立するときのみ，A^TQA は正値対称行列である．また，P は，$(n+1) \times (n+1)$ の任意の正値対称行列とする．すると，前提条件 1 が成立するとき，$A_d^TPA_d$ は正値対称行列である．

3.5 位置・速度逐次推定

ここでは，ドップラー観測値と式 (21) で算出した目標位置とを使用して，目標速度を推定する方法（逐次法と呼ぶ）について述べる．

式 (44) において，$\underline{a}_l$ をその推定値である式 (21) の $\hat{\underline{a}}_l$ で表現すれば，次式を得る．

$$\underline{b}_d - A_{ld}\hat{\underline{a}}_l = A_d\underline{a}_d + \underline{v}_d + A_{ld}\underline{w}_l \tag{66}$$

ここで，次式を定義する．

$$\underline{w}_l = \underline{a}_l - \hat{\underline{a}}_l \tag{67}$$

ところで，式 (54)，(67)，(23) 及び (60) より，次式を得る．

$$W_{ld} = E\Big[(\underline{v}_d + A_{ld}\underline{w}_l)(\underline{v}_d + A_{ld}\underline{w}_l)^T\Big]$$
$$= V_d + A_{ld}(A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} A_{ld}^T > 0 \quad (68)$$

次の性質は，重み付き線形最小自乗法により，目標の速度が算出できることを示す．

（性質 12）式 (66) において，重み付き最小自乗法 [10], [11] により，次式を最小とする $\underline{\hat{a}}_d$ を推定する．

$$J_d = [(\underline{b}_d - A_{ld}\underline{\hat{a}}_l) - A_d\underline{\hat{a}}_d]^T W_{ld}^{-1}[(\underline{b}_d - A_{ld}\underline{\hat{a}}_l) - A_d\underline{\hat{a}}_d] \quad (69)$$

解は，$A_d^T W_{ld}^{-1} A_d$ が正則ならば，次式である．なお，性質 11 より，前提条件 1 が成立するとき，$A_d^T W_{ld}^{-1} A_d$ は正則である．

$$\underline{\hat{a}}_d = \Big[A_d^T W_{ld}^{-1} A_d\Big]^{-1} A_d^T W_{ld}^{-1}(\underline{b}_d - A_{ld}\underline{\hat{a}}_l) \quad (70)$$

次の性質は，重み付き最小自乗法により算出した目標速度が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す．

（性質 13）前提条件 1 が成立するとき，式 (70) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}_d] = \underline{a}_d \quad (71)$$
$$E\Big[(\underline{\hat{a}}_d - \underline{a}_d)(\underline{\hat{a}}_d - \underline{a}_d)^T\Big] = \Big[A_d^T W_{ld}^{-1} A_d\Big]^{-1} > 0 \quad (72)$$

3.6 位置・速度同時推定

ここでは距離差とドップラー観測値より，目標位置と速度を同時に推定する方法（同時法と呼ぶ）について述べる．

次の性質は，重み付き線形最小自乗法により，目標の位置及び速度が算出できることを示す．

（性質 14）式 (55) において，重み付き最小自乗法により，次式を最小とする $\underline{\hat{a}}$ を推定する．

$$J = (\underline{b} - A\underline{\hat{a}})^T V^{-1}(\underline{b} - A\underline{\hat{a}}) \quad (73)$$

解は，$A^T V^{-1} A$ が正則ならば，次式である．なお，性質 11 より，前提条件 1 が成立するとき，$A^T V^{-1} A$ は正則である．

$$\underline{\hat{a}} = (A^T V^{-1} A)^{-1} A^T V^{-1} \underline{b} \quad (74)$$

次の性質は，算出した目標位置・速度が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す．

（性質 15）式 (74) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}] = \underline{a} \quad (75)$$
$$E\Big[(\underline{\hat{a}} - \underline{a})(\underline{\hat{a}} - \underline{a})^T\Big] = (A^T V^{-1} A)^{-1} \quad (76)$$

3.7 位置・速度同時推定値の性質

次の性質は，式 (74) より，最小特異値 $\lambda_{\min}$ が 0 より充分大きければ，$\underline{\hat{a}}$ が発散せずに算出できることを示す．

（性質 16）前提条件 1 が成立するとする．A の最小特異値を $\lambda_{\min}$ とする．更に，$\dot{\sigma}_i^2\ (i = 0, \cdots, n)$ のうち最大値を $\dot{\sigma}_{\max}^2$ とするすると，次式を得る．

$$\Big[A^T V^{-1} A\Big]^{-1}$$
$$\leq \max.\ [(\sigma_{\max}^2 + n\sigma_0^2), \dot{\sigma}_{\max}^2]/\lambda_{\min}^2 \cdot I_6 \quad (77)$$

（証明）式 (62) に，式 (19)，(54)，(28) 及び仮定を使用して，次式を得る．

$$0 < V \leq \max.[(\sigma_{\max}^2 + n\sigma_0^2), \dot{\sigma}_{\max}^2] I_{2n+1} \quad (78)$$

また，性質 11 より，$A^T A$ は正値対称行列であるので，次式を得る．

$$0 < \lambda_{\min}^2 I_6 \leq A^T A \quad (79)$$

式 (78) 及び (79) を使用して，式 (32) の証明と同様にして，式 (77) を得る．（証明終）

4. 考　　察

ここでは，逐次法と同時法との位置推定精度の比較及び推定誤差の上界について述べる．

4.1 位置推定精度の比較

$$N = \begin{pmatrix} I_3 & 0I_3 \end{pmatrix} \quad (80)$$

とすれば，式 (12) と (58) より，次式を得る．

$$\underline{a}_l = N\underline{a} \quad (81)$$

すると，次式は，同時法の位置の推定値である．

$$\underline{\hat{a}}_{lS} = N\underline{\hat{a}} \quad (82)$$

したがって，逐次法と同時法との位置推定精度の比較には，$\underline{\hat{a}}_l$ と $\underline{\hat{a}}_{lS}$ とを比較すればよい．

次の性質は，同時法による目標位置が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す．

（性質 17）式 (82) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}_{lS}] = \underline{a}_l \tag{83}$$

$$E\Big[(\underline{\hat{a}}_{lS} - \underline{a}_l)(\underline{\hat{a}}_{lS} - \underline{a}_l)^T\Big] = N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T \tag{84}$$

次の性質は，式 (84) 及び (23) より，同時法の位置推定精度は，距離差のみを観測する TDOA よりも改善することはあっても劣化することはないをこと示す．

（性質 18）前提条件 1 が成立するとする．すると，次式を得る，

$$N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T \leq \Big[A_l^TV_l^{-1}A_l\Big]^{-1} \tag{85}$$

（証明）式 (78) より V^{-1} は正値であるので，性質 11 より $A^TV^{-1}A$ も正値である．

式 (57) 及び (62) より，次式を得る．

$$A^TV^{-1}A = \begin{pmatrix} A_l^TV_l^{-1}A_l + A_{ld}^TV_d^{-1}A_{ld} & A_{ld}^TV_d^{-1}A_d \\ A_d^TV_d^{-1}A_{ld} & A_d^TV_d^{-1}A_d \end{pmatrix} \tag{86}$$

式 (86) に，付録の定理 1 及び式 (80) を使用すれば，次式を得る．

$$N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T = \Big[A_l^TV_l^{-1}A_l + A_{ld}^TFA_{ld}\Big]^{-1} > 0 \tag{87}$$

ここで，次式を定義する．

$$F = V_d^{-1} - V_d^{-1}A_d(A_d^TV_d^{-1}A_d)^{-1}A_d^TV_d^{-1} \tag{88}$$

式 (87) より，次式を得る．

$$\Big[N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T\Big]^{-1} - A_l^TV_l^{-1}A_l = A_{ld}^TFA_{ld} \tag{89}$$

ところで，任意の自然数 m に対して，次式を得る．なお，次式の左辺を展開し整理すれば，右辺となる．

$$\Big[V_d^{-1} - V_d^{-1}A_d(A_d^TV_d^{-1}A_d + 1/m \cdot I_3)^{-1}A_d^TV_d^{-1}\Big] \times \Big[V_d + mA_dA_d^T\Big] = I_{n+1} \tag{90}$$

m は自然数の仮定及び式 (54) より，次式を得る．

$$V_d + mA_dA_d^T \geq V_d > 0 \tag{91}$$

式 (90) 及び (91) より，次式を得る．

$$V_d^{-1} - V_d^{-1}A_d(A_d^TV_d^{-1}A_d + 1/m \cdot I_3)^{-1}A_d^TV_d^{-1} = \Big[V_d + mA_dA_d^T\Big]^{-1} > 0 \tag{92}$$

式 (92) において，極限（$m \to \infty$）をとり，式 (88) を使用すれば，次式を得る．

$$F \geq 0 \tag{93}$$

式 (89) 及び (93) より，性質 5 を使用して，次式を得る．

$$0 < A_l^TV_l^{-1}A_l \leq \Big[N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T\Big]^{-1} \tag{94}$$

式 (94) より，式 (85) を得る．（証明終）

4.2 速度推定精度の比較

$$M = \begin{pmatrix} 0I_3 & I_3 \end{pmatrix} \tag{95}$$

とすれば，式 (47) と (58) より，次式を得る．

$$\underline{a}_d = M\underline{a} \tag{96}$$

すると，次式は，同時法の速度の推定値である．

$$\underline{\hat{a}}_{dS} = M\underline{\hat{a}} \tag{97}$$

したがって，逐次法と同時法との速度推定精度の比較には，$\underline{\hat{a}}_d$ と $\underline{\hat{a}}_{dS}$ とを比較すればよい．

次の性質は，同時法による目標速度が不偏推定量であること，及びその推定誤差共分散行列を示す．

（性質 19）式 (97) は，次の性質を有する．

$$E[\underline{\hat{a}}_{dS}] = \underline{a}_d \tag{98}$$

$$E\Big[(\underline{\hat{a}}_{dS} - \underline{a}_d)(\underline{\hat{a}}_{dS} - \underline{a}_d)^T\Big] = M(A^TV^{-1}A)^{-1}M^T \tag{99}$$

次の性質は，式 (99) 及び (72) より，同時法の速度推定精度は，逐次法と同一であることを示す．

（性質 20）前提条件 1 が成立するとする．すると，次式を得る，

$$M(A^TV^{-1}A)^{-1}M^T = \Big[A_d^TW_{ld}^{-1}A_d\Big]^{-1} \tag{100}$$

（証明）式 (86) に，付録の定理 1 及び式 (95) を使用すれば，次式を得る．

$$M(A^TV^{-1}A)^{-1}M^T = \Big[A_d^TGA_d\Big]^{-1} > 0 \tag{101}$$

ここで，次式を定義する．

$$G = V_d^{-1} - V_d^{-1}A_{ld}(A_l^TV_l^{-1}A_l + A_{ld}^TV_d^{-1}A_{ld})^{-1}A_{ld}^TV_d^{-1} \tag{102}$$

式 (102) に文献 [12] の式 (7B.5) [P, $R > 0$ ならば $(P^{-1} + M^T R^{-1} M)^{-1} = P - PM^T(MPM^T + R)^{-1}MP$] を使用すれば，式 (68) より，次式を得る．

$$G = W_{ld}^{-1} \tag{103}$$

式 (101) 及び (103) より，式 (100) を得る．

4.3 推定誤差の上界

式 (85) より，式 (32) の右辺は，同時法の位置推定誤差の上界でもある．

また，同時法の速度推定誤差の上界は，性質 16，式 (99) 及び (95) を使用して算出できる．また，その値は，式 (100) 及び (72) より，逐次法の速度推定誤差の上界でもある．

性質 7 は，TDOA の配置行列の最小特異値が大きければ，測位誤差は小さいことを示す．

4.4 送受信機の配置と推定精度

式 (57) の配置行列 A は，式 (15)，(46) 及び (50) より，受信局の位置と，目標（送信機搭載）の位置・速度推定のための初期値から定まる．すなわち，配置行列 A は，送受信機の配置より定まり，観測誤差の影響を受けない．

この結果，配置行列 A の最小特異値 $\lambda_{\min}$ は，送受信機の配置のみより定まる値である．性質 16 及び式 (74) は，この最小特異値 $\lambda_{\min}$ が 0 より充分大きければ，位置，速度の推定値 $\underline{\hat{a}}$ は，発散せずに算出できることを示す．

ここで，最小特異値 $\lambda_{\min}$ と推定値 $\underline{\hat{a}}$ との関係を理解しやすくするため，$V = \sigma^2 I_{2n+1}$ と近似できるとすれば，式 (74) より，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{b} \tag{104}$$

式 (104) は，$A^T A$ が逆行列をもつときのみ，推定値 $\underline{\hat{a}}$ が得られることを示す．ところで，$A^T A \geq 0$ であるので，$A^T A$ の固有値（$A^T A$ の固有値の平方根が行列 A の特異値）は全て 0 以上である．この結果，$A^T A$ が逆行列をもつ必要十分条件は，$A^T A$ の固有値が全て正（最小特異値 $\lambda_{\min}$ が正）となる．

なお，直交行列 U を使用して，$A^T A$ は次式のような対角行列に変換できる．

$$U^T (A^T A) U = diag\{\lambda_1^2, \cdots, \lambda_6^2\} \tag{105}$$

ここで，$\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \cdots, 6)$ は，行列 A の特異値である．この逆行列は，存在するとすれば，次式となる．

$$\Big[U^T (A^T A) U\Big]^{-1} = diag\{1/\lambda_1^2, \cdots, 1/\lambda_6^2\} \tag{106}$$

ところで，丸めの誤差等の影響により，零ではないが零に近い値で割り算をすると不具合が起きる．また，初期値は正確とは限らない．このため，最小特異値 $\lambda_{\min}$ が 0 より充分大きいとき，推定値 $\underline{\hat{a}}$ が発散せずに得られると判断する必要がある．

なお，最小特異値 $\lambda_{\min}$ が正と，配置行列 A の階数が 6 は等価である [11]．しかし，整数値である階数は，最小特異値 $\lambda_{\min}$ は正であるが，0 に近い状況を表現できない．このため，推定精度が確保できる送受信機の配置の指標には，階数は不十分である．

4.5 数値例

次の例は，ドップラーの使用により位置推定精度が改善する場合を示す．なお，つぎの式 (112) の左辺がドップラー未使用時，右辺がドップラー使用時の位置推定誤差の分散である．また，次の例は，ドップラーの観測精度の極めて悪い（$a^2 \to \infty$）とき，式 (109) のドップラー使用時と，式 (110) のドップラー未使用時の位置推定誤差共分散行列は，一致することを示す．

（例 1）簡単のため，二次元の xy 平面で考える．また，受信機時計誤差の距離相当の観測雑音の分散 σ_i^2 $(i = 1,\ 2,\ 3)$ は 0.01，ドップラーの観測雑音の分散 $\dot{\sigma}_i^2$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ は a^2，距離とドップラーは無相関，測位計算のための初期値は真値とする．ここで，送信機を有する目標の位置 $\underline{L}$ 及び受信機 $\underline{B}_i$ $(i = 0,\ 1,\ 2)$ の位置を次式とする．

$$\underline{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{107}$$

また，それらの速度ベクトルを，次式とする．

$$\dot{\underline{B}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\underline{B}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\underline{B}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \dot{\underline{L}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{108}$$

すると，次式を得る．

$$\begin{aligned} & N\Big[A^T V^{-1} A\Big]^{-1} N^T \\ & = \frac{1}{200\{800a^2(3\sqrt{2}-4)+3\sqrt{2}\}} \times \\ & \begin{pmatrix} 1600a^2(3\sqrt{2}-2)+3\sqrt{2} & 3200a^2-3\sqrt{2} \\ 3200a^2-3\sqrt{2} & 1600a^2(3\sqrt{2}-2)+3\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{109}$$

$$\left[A_l^T V_l^{-1} A_l\right]^{-1} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 5+3\sqrt{2} & (3\sqrt{2}+4) \\ (3\sqrt{2}+4) & 5+3\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{110}$$

ここで，次式を定義する．

$$N = \begin{pmatrix} I_2 & 0I_2 \end{pmatrix} \tag{111}$$

なお，式 (109) と (110) の対角成分（推定誤差の分散に相当）において，次式が成立する．

$$\frac{5+3\sqrt{2}}{100} > \frac{1600a^2(3\sqrt{2}-2)+3\sqrt{2}}{200\{800a^2(3\sqrt{2}-4)+3\sqrt{2}\}} \tag{112}$$

(証明) 式 (107) と (108) より，初期値は真値を使用するとの仮定を使用し，式 (4)，(9)，(39)，(43)，(14) 及び (49) を算出すれば，式 (57) 及び (15)，(46)，(50) は，次式に対応する．

$$A = \begin{pmatrix} A_l & 0I_2 \\ A_{ld} & A_d \end{pmatrix},\ A_l = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$A_{ld} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{113}$$

また，観測雑音の仮定より，式 (62) 及び (17) は，式 (54) より，次式に対応する．

$$V = \begin{pmatrix} V_l & O_{2,3} \\ O_{3,2} & a^2 I_3 \end{pmatrix},\ V_l = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{114}$$

式 (113) 及び (114) より，式 (87) 及び (88) を使用して，次式を得る．

$$N\left[A^T V^{-1} A\right]^{-1} N^T = S^{-1} \tag{115}$$

$$A_l^T V_l^{-1} A_l = \frac{100}{3}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3-\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{116}$$

ここで，次式を定義する．

$$S = \begin{pmatrix} 100-\frac{100\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{16a^2} & -\frac{100\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{16a^2} \\ -\frac{100\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{16a^2} & 100-\frac{100\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{16a^2} \end{pmatrix} \tag{117}$$

式 (115) 及び (117) より，式 (109) を得る．また，式 (116) より，式 (110) を得る．（証明終）

次の例は，例 1 と同一シナリオを送受信機間の時計オフセット誤差による距離バイアス誤差は未知数として，距離とドップラーを観測値とする TOA により位置推定を行っても，推定精度は同時法と同一であることを示す．

（例 2）距離の観測雑音の分散は 0.01，送受信機間の時計オフセット誤差による距離バイアス誤差は未知数とし，他は例 1 と同一の条件とする．この場合，TOA による文献 [14] の方法での位置推定誤差共分散行列 Q は，次式となる．なお，次式は，見かけは異なるが，式 (109) と一致する．

$$Q = \frac{1}{200(1600a^2+1)}\begin{pmatrix} 2400a^2+1 & -(800a^2+1) \\ -(800a^2+1) & 2400a^2+1 \end{pmatrix}$$
$$+\frac{1}{800(3\sqrt{2}-4)a^2+3\sqrt{2}}\cdot\frac{3200a^4(3\sqrt{2}+4)}{1600a^2+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{118}$$

4.6 ドップラーを使用する TOA との関連

送受信機間に時計オフセット誤差がある場合の距離を観測値とする TOA と，時計オフセット誤差を消去した距離差を観測値とする TDOA は，同一の測位結果となることが報告されている [13]．また，ドップラーと距離を観測値とする TOA は，距離のみを観測する場合に測位が可能ならばドップラーを併用しても位置と速度が推定可能なこと，及びドップラーの使用による位置推定精度の劣化はないことが報告されている [14]．

ここで，文献 [13] の結果がドップラー観測値を併用する場合に拡張できるとする．すると，本論文の同時法が，文献 [14] と同一の性質を有することが直ちに分かる．また，同時法と本論文で提案した逐次法との速度推定精度の比較，推定誤差の上界，並びに推定精度が確保できる送受信機の配置であるとの配置行列の最小特異値による判定方法が，TDOA のみならず，ドップラーを使用した TOA にも使用可能となる．

したがって，文献 [13] の結果を，ドップラー併用の場合にも適用可能かを明らかにするのは，有益な今後の課題である．

5. む す び

本論文では，距離差のみを観測する TDOA で測位が可能な送受信機の配置ならば，逐次法あるいは同時

法により三次元の位置及び速度を推定することも可能なことを示した．また，同時法の位置推定精度は，逐次法すなわち距離差のみを観測する TDOA 以上であることを示した．なお，同時法の速度推定精度は，逐次法と同一である．すなわち，同時法は，逐次法を上回る性能を有するが，下回る点はない．このため，同時法は，逐次法より，有効な推定法である．更に，推定精度が確保できる送受信機の配置の指標として，配置行列の最小特異値が 0 より充分大きい値を提案した．また，配置行列の特異値と観測誤差の分散を使用した，推定誤差の上界の算出式を示した．

文　献

[1] 宮崎裕己，小菅義夫，島田浩樹，田中俊幸，“TDOA 測位における基準局選択と測位結果の関連，” 信学論（B），vol.J97-B, no.12, pp.1234–1242, Dec. 2014.

[2] 宮崎裕己，他，“広域マルチラテレーションの評価試験，” 第 11 回電子航法研究所発表会講演概要，pp.41–46, 東京，June 2011.

[3] EUROCAE, “Technical Specification for Wide Area Multilateration (WAM) System,” ED-142, Sept. 2010.

[4] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[5] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[6] 坂井丈泰，GPS 技術入門，東京電機大学出版局，東京，2003.

[7] 佐田達典，GPS 測量技術，オーム社，東京，2003.

[8] W.H. Foy, “Position-location Solutions by Taylor-series estimation,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.12, no.2, pp.187–194, March 1976.

[9] J. Guo and S. Jan, “Combined use of Doppler observation and DTOA measurement of 1090-MHz ADS-B signals for wide area multilateration,” Proc. 2015 International Technical Meeting, ION ITM 2015, pp.84–93, Jan. 2015.

[10] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[11] 中川　徹，小柳義夫，最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，東京，1982.

[12] A.H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, San Diego, 1970.

[13] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，“TOA と TDOA 測位の同一性，” 信学論（B），vol.J98-B, no.2, pp.223–233, Feb. 2015.

[14] 小菅義夫，古賀　禎，宮崎裕己，秋田　学，稲葉敬之，“距離とドップラーを観測値とするテイラー級数推定法を用いた三次元の位置及び速度推定の解析，” 信学論（B），vol.J98-B, no.8, pp.830–839, Aug. 2015.

付　　録

（補題）$a_0 \geq 0$，$a \geq 0$ とすれば，次式の $n \times n$ の対称行列 B の最大固有値は $b = a + na_0$ である．

$$B = \begin{pmatrix} a+a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a+a_0 & & a_0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_0 & a_0 & & a+a_0 \end{pmatrix} \tag{A·1}$$

（証明）式 (A·1) より，行列 B の固有方程式は次式となる．

$$\begin{aligned} |B - \lambda I_n| &= \\ &\begin{vmatrix} a+a_0-\lambda & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a+a_0-\lambda & & a_0 \\ \vdots & & \ddots & \\ a_0 & a_0 & & a+a_0-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b-\lambda & a_0 & \cdots & a_0 \\ b-\lambda & a+a_0-\lambda & & a_0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b-\lambda & a_0 & & a+a_0-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (b-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0 \\ 1 & a+a_0-\lambda & & a_0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & a_0 & & a+a_0-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (b-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0 \\ 0 & a-\lambda & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (b-\lambda)(a-\lambda)^{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{A·2}$$

なお，式 (A·2) では，まず第 2 列目〜第 n 列目を第 1 列目に加算した後，$b - \lambda$ を第 1 列目の共通因数としてくくりだし，つぎに第 2 行目〜第 n 行目から第 1 行目を減算し，最後に三角行列の行列式の性質を使用した．式 (A·2) より，結論を得る．（証明終）

（定理 1）D_{11}，D_{22} は正方行列で，

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{pmatrix} > 0 \tag{A·3}$$

とする．すると，D_{11}，D_{22}，$H_1 = D_{22} - {D_{12}}^T {D_{11}}^{-1} D_{12}$

及び $H_2 = D_{11} - D_{12}{D_{22}}^{-1}{D_{12}}^T$ は正値対称行列で，次式が成立する [4]．

$$
\begin{aligned}
&D^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} D_{11}^{-1} + D_{11}^{-1} D_{12} H_1^{-1} D_{12}^T D_{11}^{-1} & -D_{11}^{-1} D_{12} H_1^{-1} \\ -H_1^{-1} D_{12}^T D_{11}^{-1} & H_1^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} H_2^{-1} & -H_2^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \\ -D_{22}^{-1} D_{12}^T H_2^{-1} & D_{22}^{-1} + D_{22}^{-1} D_{12}^T H_2^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{A·4}
$$

（平成 27 年 7 月 5 日受付，9 月 23 日再受付）

小菅　義夫　（正員）

昭 47 早大・理工・数学卒．昭 49 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平 16 長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員．電通大特任教授．工博．IEEE シニア会員．

古賀　　禎　（正員）

平 5 年東京理科大・理工・電気卒．平 7 年同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入所．平 13 年カリフォルニア大デービス校客員研究員．工博．二次監視レーダ，空港面監視システムの研究に従事．

宮崎　裕己　（正員）

平 3 信州大・工卒．平 5 同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入省．以来，二次監視レーダやマルチラテレーションに関する研究開発に従事．電気学会会員．

秋田　　学　（正員）

平 17 大阪大・工・電子情報エネルギー工卒，平 20 同大大学院博士前期課程了．平 23 同大大学院博士後期課程了．平 24 ニューメキシコ工科大学博士研究員．平 25 電気通信大学大学院情報理工学研究科助教．

稲葉　敬之　（正員）

昭 56 東工大・理・物理卒，昭 58 同大大学院修士課程了．同年，三菱電機 (株) 入社．平 20 年 4 月より電通大教授．工博．レーダ信号処理，超電導磁気センサ信号処理，アダプティブアレー信号処理，車載レーダの研究開発等に従事．IEEE シニア会員．