論　文

位置・速度を観測値とした過渡応答用の等加速度運動モデル非干渉形フィルタ

小菅　義夫[†,††]　古賀　禎[†]　宮崎　裕己[†]　秋田　学[††]
稲葉　敬之[††]

A Constant Acceleration Target Model Decoupled Filter Using Position and Velocity Measurements for a Transient Response

Yoshio KOSUGE[†,††], Tadashi KOGA[†], Hiromi MIYAZAKI[†], Manabu AKITA[††], and Takayuki INABA[††]

あらまし　等加速度運動モデルを使用した追尾フィルタの初期状態での過渡応答について述べる．この代表例は，位置のみを観測値として運動モデルに曖昧さがないとしたカルマンフィルタ（K-L と呼ぶ）である．このK-L より導出される α–β–γ フィルタは，簡便で実用的なばかりではなく，追尾性能の解析が容易である．ところで，位置及び速度を観測値として，運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタで追尾フィルタが構築できる．この場合，重み付き最小自乗法で初期値を算出すれば（K-LV と呼ぶ），速度観測性能によらず，K-L より高性能である．しかし，α–β–γ フィルタのように逆行列及び誤差共分散行列の算出が不要な簡便な追尾フィルタが，K–LV から導出できるかどうかは不明だった．本論文では，一次元空間用の K–LV において，サンプリング間隔及び観測雑音の統計的性質が一定ならば，上記のような簡便な追尾フィルタが構築できることを示す．また，追尾誤差の分散も，逆行列の計算なしで，サンプリング回数，サンプリング間隔，位置と速度の観測雑音の相関係数及び位置，速度の観測雑音の分散から算出できることを示す．

キーワード　追尾フィルタ，カルマンフィルタ，過渡応答，α–β–γ フィルタ

1. まえがき

自動車や航空機等の移動物体の等加速度運動モデルを使用した追尾フィルタの初期状態での過渡応答について述べる．等加速度運動モデルを使用した追尾フィルタでは，自動車や航空機等の移動物体である目標からの観測雑音を含んだセンサからの観測値をもとに，目標の位置，速度及び加速度の真値を推定する [1]～[11]．

この代表例は，位置のみを観測値として運動モデルに曖昧さがないとしたカルマンフィルタ（K–L と呼ぶ）である [1]～[8]．ところで，カルマンフィルタで追尾フィルタを構築する場合，誤差共分散行列及び逆行列の算出が必要となる [12], [13]．しかし，逆行列の算出は，まるめの誤差に弱いとの欠点を有する [14]．更に，運動モデルに曖昧さがないとした場合，誤差共分散行列の正値性が，逆行列の演算を繰り返すことにより崩れ，カルマンフィルタは数値的に不安定になりやすい．このため，自動車レーダのように，演算桁数の小さい低価格のプロセッサでシステムを構築する必要がある場合，誤差共分散行列及び逆行列の算出が不要な形のカルマンフィルタで，追尾フィルタが構築できることが望ましい．

K–L を，サンプリング間隔及び観測雑音の分散は一定として一次元空間の追尾に限定すれば，ゲインがサンプリング回数で決定できる過渡応答用の α–β–γ フィルタと等価となる [7]～[10]．この過渡応答用の α–β–γ フィルタは，逆行列及び誤差共分散行列の算出が不要で簡便で実用的である．また，追尾誤差の分散が，逆行列の算出なしで，サンプリング回数より算出できる

[†] 独立行政法人電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaiji-higashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan
[††] 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Information and Engineering, University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan

ため，追尾性能の解析が容易である．

ところで，位置及び速度を観測値として，運動モデルに曖昧さがないとしたカルマンフィルタで追尾フィルタが構築可能である．この場合，2 サンプリング分の観測値を使用して，重み付き最小自乗法で初期値を算出すれば（K–LV と呼ぶ），サンプリング間隔及び速度観測性能によらず，K–L より高性能である [11]．

しかし，K–L から導出される α–β–γ フィルタと同様な簡便な追尾フィルタが，K–LV から，導出できるかどうかは不明だった．

本論文では，一次元空間用の K–LV において，サンプリング間隔及び観測雑音の統計的性質がサンプリング時刻によらず一定ならば，逆行列及び誤差共分散行列の算出が不要な簡便な追尾フィルタが構築できることを示す．また，追尾誤差の分散が，逆行列の計算なしで，サンプリング回数，サンプリング間隔，位置と速度の観測雑音の相関係数及び位置，速度の観測雑音の分散から算出できることを示す．更に，位置のみを観測値とする従来の α–β–γ フィルタとの関連を明らかにする．

2. α–β–γ フィルタ

2.1 定　　義

サンプリング間隔は一定値 T として，サンプリング時刻を $t_k = kT$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ とする（以後，時刻 t_k と呼ぶ）．すると，α–β–γ フィルタは，時刻 t_k における目標位置平滑値（本論文では，時刻 t_k までの観測値を使用した，時刻 t_k に対する推定値を平滑値と言う．なお，一般的な推定論では，これをフィルタ値と呼ぶ [12], [15]）を x_{sk}，予測値を x_{pk}，観測値を x_{ok}，目標速度の平滑値を $\dot{x}_{sk}$，予測値を $\dot{x}_{pk}$，目標加速度の平滑値を $\ddot{x}_{sk}$，目標加速度の予測値を $\ddot{x}_{pk}$，位置のゲインを α_k，速度のゲインを β_k，加速度のゲインを γ_k としたとき，以下の式 (1)〜(6) で定義される [2], [4], [6]〜[11]．

$$x_{sk} = x_{pk} + \alpha_k(x_{ok} - x_{pk}) \tag{1}$$

$$\dot{x}_{sk} = \dot{x}_{pk} + \beta_k/T \cdot (x_{ok} - x_{pk}) \tag{2}$$

$$\ddot{x}_{sk} = \ddot{x}_{pk} + \gamma_k/T^2 \cdot (x_{ok} - x_{pk}) \tag{3}$$

$$x_{pk} = x_{sk-1} + T \cdot \dot{x}_{sk-1} + T^2/2 \cdot \ddot{x}_{sk-1} \tag{4}$$

$$\dot{x}_{pk} = \dot{x}_{sk-1} + T \cdot \ddot{x}_{sk-1} \tag{5}$$

$$\ddot{x}_{pk} = \ddot{x}_{sk-1} \tag{6}$$

2.2 過渡応答用ゲイン

α–β–γ フィルタを使用した場合，過渡応答には，運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用した一次元空間用のカルマンフィルタより導出される次式がよく使用される [7], [8], [10]．

$$\alpha_k = \frac{3(3k^2 + 3k + 2)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (2 \le k) \tag{7}$$

$$\beta_k = \frac{18(2k+1)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (2 \le k) \tag{8}$$

$$\gamma_k = \frac{60}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad (2 \le k) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} x_{s2} &= x_{o2}, \\ \dot{x}_{s2} &= \frac{1}{2T}(3x_{o2} - 4x_{o1} + x_{o0}), \\ \ddot{x}_{s2} &= \frac{1}{T^2}(x_{o2} - 2x_{o1} + x_{o0}) \end{aligned} \tag{10}$$

3. 位置及び速度を観測値とする追尾法

3.1 一次元空間追尾過渡応答用カルマンフィルタ

ここでは，位置と速度を観測値とする運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用した一次元空間追尾用のカルマンフィルタ [11] について述べる．なお，A^T は行列 A の転置行列，A^{-1} は行列 A の逆行列を表す．

このため，まず，α–β–γ フィルタの定義に使用した記号を用いて．時刻 t_k の予測ベクトル $\underline{\hat{x}}_k(-)$ 及び平滑ベクトル $\underline{\hat{x}}_k(+)$ を次式で定義する．

$$\underline{\hat{x}}_k(-) = (x_{pk}, \dot{x}_{pk}, \ddot{x}_{pk})^T \tag{11}$$

$$\underline{\hat{x}}_k(+) = (x_{sk}, \dot{x}_{sk}, \ddot{x}_{sk})^T \tag{12}$$

つぎに，時刻 t_k の目標の位置，速度，加速度の真値をそれぞれ x_k，$\dot{x}_k$，$\ddot{x}_k$ とし，

$$\underline{x}_k = (x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k)^T \tag{13}$$

とし，$E[\ ]$ は平均を表す記号として，予測誤差共分散行列 $P_k(-)$ 及び平滑誤差共分散行列 $P_k(+)$ を次式で定義する．

$$P_k(-) = E\Big[(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(-))(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(-))^T\Big] \tag{14}$$

$$P_k(+) = E\Big[(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(+))(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(+))^T\Big] \tag{15}$$

また，$\dot{x}_{ok}$ は時刻 t_k の目標速度観測値として，観測ベクトルとして，次式を定義する．

$$\underline{z}_k = (x_{ok}, \dot{x}_{ok})^T \tag{16}$$

ここで，観測雑音の統計性質は時刻 t_k に無関係に一定とし，観測雑音共分散行列 B は定数行列として，次式を定義する．

$$B = \begin{pmatrix} b_l & \rho\sqrt{b_l b_v} \\ \rho\sqrt{b_l b_v} & b_v \end{pmatrix} \tag{17}$$

なお，本論文では，観測雑音共分散行列 B は定数の正値対称行列として，次式を仮定する．

$$|\rho| < 1 \tag{18}$$

ここで，b_l は位置観測雑音の分散，b_v は速度観測雑音の分散，ρ は位置の観測雑音と速度の観測雑音との相関係数である．更に，位置，速度，加速度より，位置及び速度を取り出すことを表す観測行列として，次式を定義する．

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

最後に，目標はサンプリング間で等加速度運動を行うことを表す推移行列として，次式を定義する．

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

すると，運動モデルに曖昧さがないと仮定したカルマンフィルタは，K_k を時刻 t_k のゲイン行列とすれば，以下の式 (21)～(25) で表される．

$$\underline{\hat{x}}_k(-) = \Phi \underline{\hat{x}}_{k-1}(+) \tag{21}$$

$$P_k(-) = \Phi P_{k-1}(+)\Phi^T \tag{22}$$

$$K_k = P_k(-)H^T\left[HP_k(-)H^T + B\right]^{-1} \tag{23}$$

$$\underline{\hat{x}}_k(+) = \underline{\hat{x}}_k(-) + K_k(\underline{z}_k - H\underline{\hat{x}}_k(-)) \tag{24}$$

$$P_k(+) = P_k(-) - K_k H P_k(-) \tag{25}$$

なお，次式が成立する [12], [13].

$$P_k(+) = \left[P_k(-)^{-1} + H^T B^{-1} H\right]^{-1} \tag{26}$$

$$K_k = P_k(+)H^T B^{-1} \tag{27}$$

3.2 初　期　値

次式の重み付き最小自乗法による初期値を使用した前節で述べた追尾フィルタを K–LV と呼ぶ [11].

$$\underline{\hat{x}}_1(+) = \Phi L_1^{-1}\left[H^T B^{-1}\underline{z}_0 + \Phi^T H^T B^{-1}\underline{z}_1\right] \tag{28}$$

$$P_1(+) = \Phi L_1^{-1}\Phi^T \tag{29}$$

ここで，次式を定義する．

$$L_1 = H^T B^{-1} H + \Phi^T H^T B^{-1} H \Phi \tag{30}$$

なお，式 (18) が成立するとき，L_1 は正則である [11].

4. 非干渉形フィルタ

ここでは，

$$P_k(-) = \begin{pmatrix} p_k^{11}(-) & p_k^{12}(-) & p_k^{13}(-) \\ p_k^{12}(-) & p_k^{22}(-) & p_k^{23}(-) \\ p_k^{13}(-) & p_k^{23}(-) & p_k^{33}(-) \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$P_k(+) = \begin{pmatrix} p_k^{11}(+) & p_k^{12}(+) & p_k^{13}(+) \\ p_k^{12}(+) & p_k^{22}(+) & p_k^{23}(+) \\ p_k^{13}(+) & p_k^{23}(+) & p_k^{33}(+) \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$K_k = \begin{pmatrix} \alpha'_k & \alpha'_{k,v} \\ \beta'_k & \beta'_{k,v} \\ \gamma'_k & \gamma'_{k,v} \end{pmatrix} \tag{33}$$

として，各行列の各成分を k，T，b_l，b_v 及び ρ から直接算出する方式を明らかにする．

4.1 初　期　値

次の性質は，初期値の特徴が把握しやすい，逆行列の演算が不要な式 (28) 及び (29) の各成分の算出式を示す．なお，証明は，付録に示す．

（性質 1）K-LV において，次式が成立する．

なお，以下の式 (34)～(36) は，初期平滑ベクトルの各成分の算出式である．

$$x_{s1} = \frac{2b_l x_{o0} + (T^2 b_v + 2b_l)x_{o1} + Tb_l(\dot{x}_{o0} + \dot{x}_{o1})}{T^2 b_v + 4b_l} - \frac{\rho T\sqrt{b_l b_v}\{2(x_{o0} - x_{o1}) + T(\dot{x}_{o0} + \dot{x}_{o1})\}}{2(T^2 b_v + 4b_l)} \tag{34}$$

$$\dot{x}_{s1} = \frac{2Tb_v(x_{o1} - x_{o0}) - T^2 b_v \dot{x}_{o0} + (T^2 b_v + 8b_l)\dot{x}_{o1}}{2(T^2 b_v + 4b_l)} + \frac{\rho\sqrt{b_l b_v}\{2(x_{o0} - x_{o1}) + T(\dot{x}_{o0} + \dot{x}_{o1})\}}{(T^2 b_v + 4b_l)} \tag{35}$$

$$\ddot{x}_{s1} = \frac{\dot{x}_{o1} - \dot{x}_{o0}}{T} + \frac{2\rho\sqrt{b_l b_v}\{2(x_{o0} - x_{o1}) + T(\dot{x}_{o0} + \dot{x}_{o1})\}}{T(T^2 b_v + 4b_l)} \tag{36}$$

なお，以下の式 (37)～(42) は，初期平滑誤差共分散行列の各成分の算出式である．

$$p_1^{11}(+) = \frac{(2T^2 b_v + 4b_l - T^2\rho^2 b_v + 4T\rho\sqrt{b_l b_v})b_l}{2(T^2 b_v + 4b_l)} \tag{37}$$

$$p_1^{12}(+) = \frac{2Tb_lb_v+T^2\rho b_v\sqrt{b_lb_v}+2T\rho^2b_lb_v+4\rho b_l\sqrt{b_lb_v}}{2(T^2b_v+4b_l)} \tag{38}$$

$$p_1^{13}(+) = \frac{\rho b_v(T\sqrt{b_lb_v}+2\rho b_l)}{(T^2b_v+4b_l)} \tag{39}$$

$$p_1^{22}(+) = \frac{b_v(T^2b_v+8b_l+4T\rho\sqrt{b_lb_v}-4\rho^2b_l)}{2(T^2b_v+4b_l)} \tag{40}$$

$$p_1^{23}(+) = \frac{b_v\{T^2b_v+4(1-\rho^2)b_l+2T\rho\sqrt{b_lb_v}\}}{T(T^2b_v+4b_l)} \tag{41}$$

$$p_1^{33}(+) = \frac{2b_v\{T^2b_v+4(1-\rho^2)b_l\}}{T^2(T^2b_v+4b_l)} \tag{42}$$

4.2 誤差共分散行列

次の性質は，サンプリング回数及び観測雑音の統計的性質を使用した平滑誤差共分散行列及び予測誤差共分散行列の各成分の算出式を示す．ここで，次の性質の式 (43)，(46) 及び (48) は，それぞれ位置，速度，加速度の平滑誤差の分散である．また，次の性質の式 (49)，(52) 及び (54) は，それぞれ位置，速度，加速度の予測誤差の分散である．いずれも，逆行列の演算が不要で，サンプリング回数と観測雑音の統計的性質より直接算出できるため便利である．例えば，観測雑音の統計的性質より，所要の追尾精度が得られるサンプリング回数が容易に算出できる．この結果は，追尾開始から所要追尾性能を満たすまでの経過時間の見積もりに使用できる．逆に，追尾開始から所要追尾性能を満たすまでの経過時間が要求された場合，所要の観測雑音の統計的性質が容易に算出できる．なお，証明は，付録に示す．

（性質 2）K–LV において，$k = 1, 2, \cdots$ のとき，次式が成立する．

なお，以下の式 (43)〜(48) は，平滑誤差共分散行列の各成分の算出式である．

$$\begin{aligned} P_k^{11}(+) &= \omega_k/4 \times \\ &\{1/720\cdot(k-1)k(k+2)(3k^2+3k+2)T^4b_v^2 \\ &+1/60\cdot(k-1)k(k+2)(2k+1)T^3\rho b_v\sqrt{b_lb_v} \\ &+1/90\cdot(13k^3+22k^2+13k-3)T^2b_lb_v \\ &-1/4\cdot kT^2\rho^2b_lb_v \\ &+1/3\cdot k(k+2)T\rho b_l\sqrt{b_lb_v}+1/3\cdot(k+2)b_l^2\} \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} P_k^{12}(+) &= \omega_k/4\cdot\{1/120\cdot(k-1)k(k+2)(2k+1)T^3b_v^2 \\ &+1/60\cdot(k+2)(7k^2-k-1)T^2\rho b_v\sqrt{b_lb_v} \\ &+1/6\cdot k(2k+1)Tb_lb_v+1/2\cdot kT\rho^2b_lb_v \\ &+1/3\cdot(k+2)\rho b_l\sqrt{b_lb_v}\} \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned} P_k^{13}(+) &= \omega_kb_v/4\cdot\{1/36\cdot(k-1)k(k+2)T^2b_v \\ &+1/6\cdot k(k+2)T\rho\sqrt{b_lb_v}+\rho^2b_l \\ &+1/3\cdot(k-1)b_l\} \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} P_k^{22}(+) &= \omega_kb_v/2\cdot\{1/360\cdot(2k+1)(k+2)(8k-3)T^2b_v \\ &+1/6\cdot k(k+2)T\rho\sqrt{b_lb_v}+1/3\cdot(2k+1)b_l \\ &-1/2\cdot k\rho^2b_l\} \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} P_k^{23}(+) &= \omega_kb_v/2T\cdot\{1/12\cdot k(k+2)T^2b_v \\ &+1/6\cdot(k+2)T\rho\sqrt{b_lb_v}+(1-\rho^2)b_l\} \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} P_k^{33}(+) &= \omega_kb_v/kT^2 \\ &\cdot\{1/12\cdot k(k+2)T^2b_v+(1-\rho^2)b_l\} \end{aligned} \tag{48}$$

なお，以下の式 (49)〜(54) は，予測誤差共分散行列の各成分の算出式である．

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{11}(-) &= \omega_k(k+2)/4k \times \\ &\{1/720\cdot k(k+2)(k+3)(3k^2+9k+8)T^4b_v^2 \\ &+1/60\cdot k(2k^3+13k^2+27k+18)T^3\rho b_v\sqrt{b_lb_v} \\ &+1/90\cdot(13k^3+56k^2+81k+45)T^2b_lb_v \\ &-1/4\cdot(k+2)T^2\rho^2b_lb_v \\ &+1/3\cdot k(k+2)T\rho b_l\sqrt{b_lb_v}+1/3\cdot kb_l^2\} \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{12}(-) &= \omega_k(k+2)/4k \times \\ &\{1/120\cdot k(k+2)(k+3)(2k+3)T^3b_v^2 \\ &+1/60\cdot k(7k^2+29k+29)T^2\rho b_v\sqrt{b_lb_v} \\ &+1/6\cdot(k+2)(2k+3)Tb_lb_v-1/2\cdot(k+2)T\rho^2b_lb_v \\ &+1/3\cdot k\rho b_l\sqrt{b_lb_v}\} \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{13}(-) &= \omega_k(k+2)b_v/4k \times \\ &\{1/36\cdot k(k+2)(k+3)T^2b_v \\ &+1/6\cdot k(k+2)T\rho\sqrt{b_lb_v}-\rho^2b_l+1/3\cdot(k+3)b_l\} \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{22}(-) &= \omega_k(k+2)b_v/2k \times \\ &\{1/360\cdot k(2k+3)(8k+19)T^2b_v \\ &+1/6\cdot k(k+2)T\rho\sqrt{b_lb_v} \end{aligned}$$

$$- 1/2 \cdot (k+2)\rho^2 b_l + 1/3 \cdot (2k+3) b_l\} \tag{52}$$

$$P_{k+1}^{23}(-) = \omega_k (k+2) b_v / 2kT \times$$
$$\{1/12 \cdot k(k+2)T^2 b_v + 1/6 \cdot kT\rho\sqrt{b_l b_v}$$
$$+ (1-\rho^2) b_l\} \tag{53}$$

$$P_{k+1}^{33}(-) = \omega_k b_v / kT^2$$
$$\cdot \{1/12 \cdot k(k+2)T^2 b_v + (1-\rho^2) b_l\} \tag{54}$$

ここで，次式を定義する．

$$a_k = 1/720 \cdot (k-1)k(k+2)(k+3)T^4 b_v^2$$
$$+ (1-\rho^2) b_l \{1/20 \cdot (2k^2+4k-1)T^2 b_v + b_l\} \tag{55}$$

$$\omega_k = \frac{12(1-\rho^2) b_l}{(k+1)(k+2)a_k} \tag{56}$$

4.3 推定値とゲイン

次の性質は，逆行列及び推定誤差共分散行列の算出なしで，一次元空間用の K–LV の構築が可能なことを示す．この結果は，有効桁数の小さい，あるいは演算速度が遅い計算機でも，位置及び速度を観測値とした実システムの構築が可能であることを示す．したがって，本論文の結果は，低価格の計算機で多数の目標を高サンプルレートで追尾するシステムの構築に，特に有効である．また，速度観測値のゲイン $\alpha'_{k,v}$，$\beta'_{k,v}$，$\gamma'_{k,v}$ が 0 の場合，ゲインの決め方を除けば，式 (1)〜(6) と，次の性質の式 (57)〜(62) は，それぞれ同一である．すなわち，本論文の結果は，位置のみを観測値とする従来の α–β–γ フィルタを，速度を観測値とする場合に拡張した結果と考えてよい．なお，証明は，付録に示す．

（性質 3）K–LV において，$k = 2, 3, \cdots$ のとき，次式が成立する．

なお，以下の式 (57)〜(59) は，平滑ベクトルの各成分の算出式である．

$$x_{sk} = x_{pk} + \alpha'_k (x_{ok} - x_{pk}) + \alpha'_{k,v} (\dot{x}_{ok} - \dot{x}_{pk}) \tag{57}$$

$$\dot{x}_{sk} = \dot{x}_{pk} + \beta'_k (x_{ok} - x_{pk}) + \beta'_{k,v} (\dot{x}_{ok} - \dot{x}_{pk}) \tag{58}$$

$$\ddot{x}_{sk} = \ddot{x}_{pk} + \gamma'_k (x_{ok} - x_{pk}) + \gamma'_{k,v} (\dot{x}_{ok} - \dot{x}_{pk}) \tag{59}$$

なお，以下の式 (60)〜(62) は，予測ベクトルの各成分の算出式である．

$$x_{pk} = x_{sk-1} + T\dot{x}_{sk-1} + 1/2 \cdot T^2 \ddot{x}_{sk-1} \tag{60}$$

$$\dot{x}_{pk} = \dot{x}_{sk-1} + T\ddot{x}_{sk-1} \tag{61}$$

$$\ddot{x}_{pk} = \ddot{x}_{sk-1} \tag{62}$$

なお，以下の式 (63)〜(68) は，ゲイン行列の各成分の算出式である．

$$\alpha'_k$$
$$= \eta_k \{1/1440 \cdot (k-1)k(k+2)(3k^2+3k+2)T^4 b_v^2$$
$$+ 1/180 \cdot (13k^3+22k^2+13k-3)T^2 b_l b_v$$
$$+ 1/6 \cdot (k+2) b_l^2\}$$
$$+ \eta_k \rho \{1/240 \cdot (k-1)k(k+2)(2k+1)T^3 b_v \sqrt{b_l b_v}$$
$$- 1/120 \cdot (7k^3+13k^2+12k-2)T^2 \rho b_l b_v$$
$$+ 1/4 \cdot kT(1-\rho^2) b_l \sqrt{b_l b_v} - 1/6 \cdot (k+2)\rho b_l^2\} \tag{63}$$

$$\alpha'_{k,v} = k(2k+1)T b_l \eta_k \times$$
$$\{1/240 \cdot (k-1)(k+2)T^2 b_v + 1/12 \cdot b_l\} - k\rho T \eta_k \times$$
$$\{1/1440 \cdot (k-1)(k+2)(3k^2+3k+2)T^3 b_v \sqrt{b_l b_v}$$
$$+ 1/120 \cdot (k-1)(k+2)(2k+1)T^2 \rho b_l b_v$$
$$+ 1/72 \cdot (k^2+k+7k)T b_l \sqrt{b_l b_v}$$
$$- 1/8 \cdot T b_l \rho^2 \sqrt{b_l b_v} + 1/12 \cdot (2k+1)\rho b_l^2\} \tag{64}$$

$$\beta'_k = k(2k+1)T b_v \eta_k \times$$
$$\{1/240 \cdot (k-1)(k+2)T^2 b_v + 1/12 \cdot b_l\}$$
$$+ \rho \eta_k \{1/72 \cdot (k-1)k(k+2)T^2 b_v \sqrt{b_l b_v}$$
$$- 1/12 \cdot k(2k+1)T\rho b_l b_v - 1/2 \cdot k(1-\rho^2) b_l \sqrt{b_l b_v}\} \tag{65}$$

$$\beta'_{k,v} = (2k+1) b_l \eta_k \times$$
$$\{1/360 \cdot (k+2)(8k-3)T^2 b_l + 1/3 \cdot b_l\}$$
$$- \rho \eta_k \{1/240 \cdot (k-1)k(k+2)(2k+1)T^3 b_v \sqrt{b_l b_v}$$
$$+ 1/120 \cdot (k+2)(7k^2-k-1)T^2 \rho b_l b_v$$
$$- 1/4 \cdot k(1-\rho^2)T b_l \sqrt{b_l b_v} + 1/3 \cdot (2k+1)\rho b_l^2\} \tag{66}$$

$$\gamma'_k = (k-1) b_v \eta_k \{1/72 \cdot k(k+2)T^2 b_v + 1/6 \cdot b_l\}$$
$$- \rho \eta_k b_l \{1/6 \cdot (k-1)\rho b_v + 1/T \cdot (1-\rho^2)\sqrt{b_l b_v}\} \tag{67}$$

$$\gamma'_{k,v} = b_l \eta_k \{1/12 \cdot k(k+2)T b_v + 1/T \cdot b_l\}$$
$$- \rho \eta_k \{1/72 \cdot (k-1)k(k+2)T^2 b_v \sqrt{b_l b_v}$$
$$+ 1/12 \cdot k(k+2)T\rho b_l b_v$$
$$- 1/2 \cdot (1-\rho^2) b_l \sqrt{b_l b_v} + 1/T \cdot \rho b_l^2\} \tag{68}$$

ここで，次式を定義する．

$$\eta_k = \frac{6}{(k+1)(k+2)a_k} \tag{69}$$

5. 考　　察

5.1 α–β–γ フィルタとの関連

位置誤差の分散がきわめて小さいあるいは速度誤差の分散がきわめて大きいとき（速度が観測されないときなど），本論文の追尾法は，次の性質が示すように式 (7)〜(9) の α–β–γ フィルタに近似される．

（性質 4）$b_v/b_l \to \infty$ のとき，次式を得る．

$$\alpha'_k \to \alpha_k,\ \beta'_k \to \beta_k/T,\ \gamma'_k \to \gamma_k/T^2 \tag{70}$$

$$\alpha'_{k,v} \to 0,\ \beta'_{k,v} \to 0,\ \gamma'_{k,v} \to 0 \tag{71}$$

（証明）式 (69) 及び (55) より，次式を得る．

$$\lim_{\frac{b_v}{b_l}\to\infty} b_v^2\eta_k = \frac{4320}{(k-1)k(k+1)(k+2)^2(k+3)T^4} \tag{72}$$

式 (63)〜(68) 及び (72) より，式 (7)〜(9) を使用して，結論を得る．（証明終）

5.2 ゲインの時間推移

式 (7)〜(9) でゲインの定まる従来の α–β–γ フィルタのゲインは，サンプリング数が増加すると 0 に収束し，追尾継続が困難になる．このため，初期状態の過渡応答用に限定して使用されている．次の性質は，本論文の追尾フィルタも，初期状態の過渡応答用に限定して使用する必要があることを示す．

（性質 5）$k \to \infty$ のとき，次式を得る．

$$\alpha'_k \to 0,\ \beta'_k \to 0,\ \gamma'_k \to 0 \tag{73}$$

$$\alpha'_{k,v} \to 0,\ \beta'_{k,v} \to 0,\ \gamma'_{k,v} \to 0 \tag{74}$$

（証明）式 (63)〜(69) 及び (55) より結論を得る．（証明終）

5.3 位置と速度の観測雑音が無相関の場合

例えば，前方監視の車載 FM–CW レーダでは，位置と速度（ドップラー）の観測雑音は無相関（$\rho = 0$）と考えてよい．この場合，性質 1〜3 の本論文のアルゴリズムは，著しく簡略化される．例えば，式 (34)〜(36) は，理解しやすい次式となる．

$$x_{s1} = \frac{2b_l x_{o0} + (T^2 b_v + 2b_l)x_{o1} + Tb_l(\dot{x}_{o0} + \dot{x}_{o1})}{T^2 b_v + 4b_l} \tag{75}$$

$$\dot{x}_{s1} = \frac{2Tb_v(x_{o1} - x_{o0}) - T^2 b_v \dot{x}_{o0} + (T^2 b_v + 8b_l)\dot{x}_{o1}}{2(T^2 b_v + 4b_l)} \tag{76}$$

$$\ddot{x}_{s1} = 1/T \cdot (\dot{x}_{o1} - \dot{x}_{o0}) \tag{77}$$

5.4 K-LVS との関連

次式を初期値とし，位置及び速度を観測値として，運動モデルに曖昧さがないとしたカルマンフィルタ（K–LVS）は，位置のみを観測値とするカルマンフィルタ（K–L）より，性能が悪い場合があることを示した [11]．

$$\underline{\hat{x}}_1(+) = \begin{pmatrix} x_{o1} \\ \dot{x}_{o1} \\ 1/T \cdot (\dot{x}_{o1} - \dot{x}_{o0}) \end{pmatrix} \tag{78}$$

式 (75) において，$b_v/b_l \to \infty$ のとき，$x_{s1} \to x_{o1}$ である．逆に，式 (76) において，$b_v/b_l \to 0$ とき，$\dot{x}_{s1} \to \dot{x}_{o1}$ である．すなわち，重み付き最小自乗法で得られた初期値である式 (75)〜(77) に対して，位置及び速度に正反対の仮定を行うことにより，式 (78) が導出される．この結果，式 (78) による初期値は，簡明であるが，性能確保に難点があることが分かる．

6. む す び

本論文では，位置及び速度を観測値として，運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルの一次元空間追尾用のカルマンフィルタにおいて，サンプリング間隔及び観測雑音の統計的性質がサンプリング時刻によらず一定ならば，逆行列及び誤差共分散行列の算出が不要な簡便な追尾フィルタが構築できることを示した．また，追尾誤差の分散が，逆行列の計算なしで，サンプリング回数，サンプリング間隔，位置と速度の観測雑音の相関係数及び位置，速度の観測雑音の分散から算出できることを示した．更に，位置誤差の分散がきわめて小さいあるいは速度誤差の分散がきわめて大きいとき，本論文の追尾法は，位置のみを観測値とする従来の過渡応答用の α–β–γ フィルタに近似できることを示した．

文　　献

[1] C.B. Chang and J.A. Tabaczynski, “Application of state estimation to target tracking,” IEEE Trans. Autom. Control, vol.AC-29, no.2, pp.98–108, Feb. 1984.

[2] S.S. Blackman, Multiple Target Tracking with Radar Applications, ArtechHouse, Dedham, 1986.

[3] Y. Bar-Shalom and T.E. Fortman, Tracking and Data Association, Academic Press, New York, 1988.

[4] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[5] S.S. Blackman and R. Popoli, Design and Analysis

of Modern Tracking Systems, ArtechHouse, Boston, 1999.

[6] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[7] A.W. Bridgewater, "Analysis of second and third order steady-state tracking filters," AGARD Conference Proc. no.252 Strategies for Automatic Track Initiation, pp.9-1–9-11, CA, April 1970.

[8] P.R. Kalata, "The tracking index: A generalized parameter for α–β and α–β–γ target trackers," IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.AES-20, no.2, pp.174–182, March 1984.

[9] A.M. Navarro, "General properties of alpha beta, and alpha beta gamma tracking filters," PHL, 1977-02, Jan. 1977.

[10] 小菅義夫，系　正義，"各種 α–β–γ フィルタの比較，" 信学論（B），vol.J85-B, no.6, pp.982–990, June 2002.

[11] 小菅義夫，"位置及び速度を観測値とする九次元カルマンフィルタの過渡応答，" 信学論（B），vol.J97-B, no.7, pp.565–573, July 2014.

[12] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[13] A.H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, San Diego, 1970.

[14] 新谷尚義，数値計算 I，朝倉書店，東京，1967.

[15] 小菅義夫，"レーダによる単一目標追尾法の現状と将来，" 信学論（B），vol.J93-B, no.11, pp.1504–1511, Nov. 2010.

付　　　録

（性質 1 の証明）式 (17) より，次式を得る．

$$B^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)b_l b_v}\begin{pmatrix} b_v & -\rho\sqrt{b_l b_v} \\ -\rho\sqrt{b_l b_v} & b_l \end{pmatrix} \tag{A·1}$$

式 (19) 及び (A·1) より，次式を得る．

$$H^T B^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)b_l b_v}\begin{pmatrix} b_v & -\rho\sqrt{b_l b_v} \\ -\rho\sqrt{b_l b_v} & b_l \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A·2}$$

$$H^T B^{-1} H = \frac{1}{(1-\rho^2)b_l b_v}\begin{pmatrix} b_v & -\rho\sqrt{b_l b_v} & 0 \\ -\rho\sqrt{b_l b_v} & b_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A·3}$$

式 (A·2) 及び (A·3) に，式 (20) を使用して，次式を得る．

$$\Phi^T H^T B^{-1} = \begin{pmatrix} b_v & -\rho\sqrt{b_l b_v} \\ Tb_v - \rho\sqrt{b_l b_v} & -\rho T\sqrt{b_l b_v} + b_l \\ T^2/2 \cdot b_v - \rho T\sqrt{b_l b_v} & -T^2/2 \cdot \rho\sqrt{b_l b_v} + Tb_l \end{pmatrix} \tag{A·4}$$

$$\Phi^T H^T B^{-1} H\Phi = \frac{1}{(1-\rho^2)b_l b_v}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{pmatrix} \tag{A·5}$$

ここで，次式を定義する．

$$q_{11} = b_v \tag{A·6}$$

$$q_{12} = Tb_v - \rho\sqrt{b_l b_v} \tag{A·7}$$

$$q_{13} = T^2/2 \cdot b_v - \rho T\sqrt{b_l b_v} \tag{A·8}$$

$$q_{22} = T^2 b_v + b_l - 2\rho T\sqrt{b_l b_v} \tag{A·9}$$

$$q_{23} = T^3/2 \cdot b_v + Tb_l - 3T^2/2 \cdot \rho\sqrt{b_l b_v} \tag{A·10}$$

$$q_{33} = T^4/4 \cdot b_v + T^2 b_l - \rho T^3\sqrt{b_l b_v} \tag{A·11}$$

式 (30) に，式 (A·3) 及び (A·5)～(A·11) を使用して，次式を得る．

$$L_1 = \frac{1}{(1-\rho^2)b_l b_v}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{12} & l_{22} & l_{23} \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{pmatrix} \tag{A·12}$$

$$l_{11} = 2b_v \tag{A·13}$$

$$l_{12} = Tb_v - 2\rho\sqrt{b_l b_v} \tag{A·14}$$

$$l_{13} = T^2/2 \cdot b_v - \rho T\sqrt{b_l b_v} \tag{A·15}$$

$$l_{22} = T^2 b_v + 2b_l - 2\rho T\sqrt{b_l b_v} \tag{A·16}$$

$$l_{23} = T^3/2 \cdot b_v + Tb_l - 3T^2/2 \cdot \rho\sqrt{b_l b_v} \tag{A·17}$$

$$l_{33} = T^4/4 \cdot b_v + T^2 b_l - \rho T^3\sqrt{b_l b_v} \tag{A·18}$$

式 (A·12)～(A·18) より，次式を得る．

$$L_1^{-1} = \frac{1}{2T^2[T^2 b_v + 4b_l]}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \tag{A·19}$$

ここで，次式を定義する．

$$s_{11} = T^2 b_l(2T^2 b_v - T^2\rho^2 b_v - 4T\rho\sqrt{b_l b_v} + 4b_l) \tag{A·20}$$

$$s_{12} = T^2 \times (T^2\rho b_v\sqrt{b_l b_v} - 2Tb_l b_v - 2T\rho^2 b_l b_v + 4\rho b_l\sqrt{b_l b_v}) \tag{A·21}$$

$$s_{13} = 2T^2\rho b_v(2\rho b_l - T\sqrt{b_l b_v}\,) \tag{A·22}$$

$$s_{22} = T^2 b_v(T^2 b_v - 4\rho T\sqrt{b_l b_v} + 8b_l - 4\rho^2 b_l) \tag{A·23}$$

$$s_{23} = 2Tb_v(-T^2 b_v + 2T\rho\sqrt{b_l b_v} - 4b_l + 4\rho^2 b_l) \tag{A·24}$$

$$s_{33} = 4b_v\{T^2 b_v + 4(1-\rho^2)b_l\} \tag{A·25}$$

式 (20) 及び (A·19) より，次式を得る．

$$\Phi L_1^{-1} = \frac{1}{2T^2[T^2 b_v + 4b_l]} \times \begin{pmatrix} s_{11}+Ts_{12} & s_{12}+Ts_{22} & s_{13}+Ts_{23} \\ +T^2/2\cdot s_{13} & +T^2/2\cdot s_{23} & +T^2/2\cdot s_{33} \\ s_{12}+Ts_{13} & s_{22}+Ts_{23} & s_{23}+Ts_{33} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \tag{A·26}$$

式 (29) に，式 (20)，(32) 及び (A·20)～(A·26) を使用して，式 (37)～(42) を得る．

式 (28) に，式 (12)，(A·20)～(A·26)，(A·2)，(A·4) 及び (16) を使用して，式 (34)～(36) を得る．（証明終）

（性質 2 の証明）式 (43)～(48) に関する数学的帰納法により，証明する．

$k = 1$ のとき，式 (55) 及び (56) より，次式を得る．

$$a_1 = (1-\rho^2)b_l(1/4\cdot T^2 b_v + b_l) \tag{A·27}$$

$$\omega_1 = \frac{2}{(1/4\cdot T^2 b_v + b_l)} \tag{A·28}$$

式 (43)～(48) 及び (A·28) より，式 (37)～(42) を得る．したがって，$k = 1$ のとき，成立する．

k のとき，式 (43)～(48) が成立しているとする．まず，式 (22) に，式 (31)，(20) 及び (32) を使用して，次式を得る．

$$p^{11}_{k+1}(-) = p^{11}_k(+) + 2Tp^{12}_k(+) + T^2(p^{13}_k(+) + p^{22}_k(+)) + T^3 p^{23}_k(+) + T^4/4\cdot p^{33}_k(+) \tag{A·29}$$

$$p^{12}_{k+1}(-) = p^{12}_k(+) + T(p^{13}_k(+) + p^{22}_k(+)) + 3T^2/2\cdot p^{23}_k(+) + T^3/2\cdot p^{33}_k(+) \tag{A·30}$$

$$p^{13}_{k+1}(-) = p^{13}_k(+) + Tp^{23}_k(+) + T^2/2\cdot p^{33}_k(+) \tag{A·31}$$

$$p^{22}_{k+1}(-) = p^{22}_k(+) + 2Tp^{23}_k(+) + T^2 p^{33}_k(+) \tag{A·32}$$

$$p^{23}_{k+1}(-) = p^{23}_k(+) + Tp^{33}_k(+) \tag{A·33}$$

$$p^{33}_{k+1}(-) = p^{33}_k(+) \tag{A·34}$$

式 (A·29)～(A·34) に，式 (43)～(48) を使用し，式 (49)～(54) を得る．

次に，式 (31) 及び (49)～(54) より，次式を得る．

$$P_{k+1}(-)^{-1} = \frac{(k+1)}{(1-\rho^2)b_l b_v}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \tag{A·35}$$

ここで，次式を定義する．

$$m_{11} = b_v \tag{A·36}$$

$$m_{12} = -1/2\cdot(k+2)Tb_v - \rho\sqrt{b_l b_v} \tag{A·37}$$

$$m_{13} = 1/12\cdot(k+2)T\{(2k+3)Tb_v + 6\rho\sqrt{b_l b_v}\,\} \tag{A·38}$$

$$m_{22} = (k+2)T\{1/6\cdot(2k+3)Tb_v + \rho\sqrt{b_l b_v}\,\} + b_l \tag{A·39}$$

$$m_{23} = 1/8\cdot(k+2)T \times \{-(k+1)(k+2)T^2 b_v - 2(2k+3)T\rho\sqrt{b_l b_v} - 4b_l\} \tag{A·40}$$

$$m_{33} = 1/120\cdot(k+2)T^2\{(6k^3+27k^2+37k+15)T^2 b_v + 30(k+1)(k+2)T\rho\sqrt{b_l b_v} + 20(2k+3)b_l\} \tag{A·41}$$

すると，式 (32)，(43)～(48) 及び (A·35)～(A·41)，(A·3) より，次式を得る．

$$P_{k+1}(+)\Big[P_{k+1}(-)^{-1} + H^T B^{-1} H\Big] = I_3 \tag{A·42}$$

式 (A·42) に，式 (26) を使用して，$k+1$ のとき式 (43)～(48) が成立することが分かる．（証明終）

（性質 3 の証明）式 (24) に，式 (11)，(12)，(16)，(19) 及び (33) を使用して，式 (57)～(59) を得る．

式 (21) に，式 (11)，(20) 及び (12) を使用して，式 (60)～(62) を得る．

式 (27) に，式 (33)，(32)，(43)～(48) 及び (A·3) を使用して，式 (63)～(69) を得る．（証明終）

（平成 26 年 9 月 3 日受付，11 月 15 日再受付）

小菅　義夫　（正員）

昭 47 早大・理工・数学卒．昭 49 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平 16 長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員，電通大特任教授．工博．IEEE シニア会員．

古賀　　禎　（正員）

平 5 年東京理科大・理工・電気卒．平 7 年同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入所．平 13 年カリフォルニア大デービス校客員研究員．工博．二次監視レーダ，空港面監視システムの研究に従事．

宮崎　裕己　（正員）

平 3 信州大・工卒．平 5 同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入省．以来，二次監視レーダやマルチラテレーションに関する研究開発に従事．電気学会会員．

秋田　　学　（正員）

平 17 大阪大・工・電子情報エネルギー工卒，平 20 同大大学院博士前期課程了．平 23 同大大学院博士後期課程了．平 24 ニューメキシコ工科大学博士研究員．平 25 電気通信大学大学院情報理工学研究科助教．

稲葉　敬之　（正員）

昭 56 東工大・理・物理卒，昭 58 同大大学院修士課程了．同年，三菱電機（株）入社．平 20 年 4 月より電通大教授．工博．レーダ信号処理，超電導磁気センサ信号処理，アダプティブアレー信号処理，車載レーダの研究開発等に従事．IEEE シニア会員．