論　文

距離とドップラーを観測値とするテイラー級数推定法を用いた三次元の位置及び速度推定の解析

小菅　義夫[†,††]　古賀　禎[†]　宮崎　裕己[†]　秋田　学[††]
稲葉　敬之[††]

An Analysis of 3-Dimensional Location and Velocity Estimation Using Range and Doppler Measurements by Taylor-Series Estimation

Yoshio KOSUGE[†,††], Tadashi KOGA[†], Hiromi MIYAZAKI[†], Manabu AKITA[††], and Takayuki INABA[††]

あらまし　追尾フィルタにおいて，位置のほかに，速度を観測値として使用すれば，追尾性能が改善できる．ただし，速度観測により，位置観測精度に劣化がないことが前提である．ところで，TOA（Time of Arrival）測位は，送受信機間の距離を同時に複数観測し，目標の位置を推定する．この代表例は，GPS（Global Positioning System）である．このため，GPS 等でも，距離のほかにドップラー（距離の時間微分値）を観測し三次元の位置と速度を推定し，これを追尾フィルタの観測値として使用すれば，追尾性能の向上が期待できる．なお，GPS 等で使用する Taylor 展開推定法による TOA 測位では，送受信機の配置により測位精度が大きく変化し，発散する場合すらある．本論文では，Taylor 展開推定法において，距離のみを観測する TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば，距離とドップラーを複数同時に観測し三次元の位置及び速度が推定可能なことを示す．また，この場合，ドップラーの観測精度や送受信機の配置がどのような場合でも，ドップラーの使用による位置推定精度の劣化はないことを解析的に示す．

キーワード　TOA，GPS，測位，誤差解析，距離，ドップラー

1. まえがき

追尾フィルタは，航空機等の移動物体である目標の位置を観測し，目標の位置，速度などの真値を推定するアルゴリズムである [1]～[5]．この追尾フィルタにおいて，位置のほかに，速度を観測値として使用すれば，追尾性能が改善できる [3], [4]．ただし，速度観測により，位置観測精度に劣化がないことが前提である．

ところで，TOA（Time of Arrival）測位は，送受信機間の距離を同時に複数観測し，目標の位置を推定する．目標が送信源の場合，位置が既知である受信機で計測した電波伝搬時間より距離を計測する．そして，複数の受信機より得た距離観測値より，目標の位置を推定する．逆に，目標が受信機を搭載している場合，位置が既知である複数個の送信源との距離を計測する．

前者の例は，飛行する航空機からの送信電波を，地上の複数の受信機で受信するシステムである．後者の例は，GPS（Global Positioning System）である [5]～[12]．なお，これらでは，送受信機間の時刻同期誤差に起因する距離バイアス誤差も，推定対象である．

このため，GPS 等でも，距離のほかにドップラー（距離の時間微分値）を観測し，未知数である三次元の位置と速度を推定すれば，追尾性能が向上する．

ここで，距離もドップラーも，未知数の非線形関数である．したがって，推定は，非線形の連立方程式を解くことと等価となる．この連立方程式を解くため，GPS では，解の初期値を仮に与え Taylor 展開により線形近似した得た線型モデルに，重み付き最小自乗法 [13], [14] を使用し解を算出している（この解法を Taylor 展開推定法と呼ぶ）[5], [9]～[12]．更に，得られ

[†] 独立行政法人電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaiji-higashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan
[††] 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Information and Engineering, University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan

た解を初期値に再設定して同一の処理を繰り返すことで，解の算出精度向上を図っている [5], [9]〜[12].

なお，観測誤差がないとして，ドップラーの観測値の自乗が，ドップラーの算出式の自乗と等価として得た多項式を連立させた解法も提案されている [15]．また，この方法は，多項式最適化（polynomial optimization）手法を用い，ドップラーにランダムな観測誤差がある場合に拡張されている．更に，解が算出可能となる観測数が，距離や角度が併用できる場合を含め明らかになっている [15]．ただし，距離にバイアス誤差はないとしている．

ところで，Taylor 展開推定法による TOA 測位では，送受信機の配置により測位精度が大きく変化し，発散する場合すらある [5], [9]〜[12].

本論文では，Taylor 展開推定法において，距離のみを観測する TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば，距離とドップラーを複数同時に観測し三次元の位置及び速度が必ず推定可能かを明確にする．また，この場合，ドップラーの観測精度や送受信機の配置がどのような場合でも，ドップラーの使用による位置推定精度の劣化がないかを明確にする．

なお，本論文では，複数の送信機間あるいは受信機間で時刻同期は取れているが，送受信機間では時刻同期は必ずしも取れていないとする．また，送受信機間でマルチパスの影響はなく，時計オフセット誤差による距離バイアス誤差以外は，ランダム誤差のみとする．

2. 目標の位置及び速度の推定

ここでは，n 対の距離及びドップラー観測値から，三次元空間での目標位置及び目標速度を推定する方法について述べる．

2.1 距離の観測モデル

まず，目標とは異なる位置にある i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の位置ベクトル $\underline{B}_i$（既知）を，D^T は行列 D の転置行列を表すとして，次式で表す．

$$\underline{B}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \tag{1}$$

なお，座標系は，三次元直交座標を使用する．ここで，目標が送信源の場合，$\underline{B}_i$ は受信機の位置である．目標が受信機を搭載している場合，$\underline{B}_i$ は送信源の位置である．つぎに，目標の位置を次式で表す．

$$\underline{L} = (x, y, z)^T \tag{2}$$

すると，i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の送受信機間の距離の真値 R_i は次式となる．

$$R_i = f_i(x, y, z) \tag{3}$$

ここで，次式を定義する．

$$f_i(x, y, z) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \tag{4}$$

すると，i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の送受信機間の距離の観測値 R_{io} は次式となる．

$$R_{io} = R_i + S + v_i \tag{5}$$

ここで，S は時計オフセット誤差による距離のバイアス誤差，v_i はランダムな距離の観測誤差である．なお，本論文では，複数の送信機間あるいは受信機間で時刻同期は取れているが，送受信機間では時刻同期は必ずしも取れていないとし，S は i に無関係な一定値とした [5], [6], [9]〜[12]．また，送受信機間ではマルチパスの影響はないものとして，時計オフセット誤差による距離バイアス誤差以外は，距離もドップラーもランダム誤差のみとした．

すると，次の式 (7) に全微分の公式を使用して，次の性質を得る [5], [6], [9]〜[12].

（性質 1）目標の位置推定のための初期値を x_0，y_0，z_0 とすると，次式を得る．

$$\begin{aligned}\Delta R_{io} \approx{}& \alpha_i(x - x_0) + \beta_i(y - y_0) + \gamma_i(z - z_0)\\ &+ S + v_i\end{aligned} \tag{6}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta R_{io} = R_{io} - f_i(x_0, y_0, z_0) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\partial f_i}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{x_i - x_0}{f_i(x_0, y_0, z_0)},\\ \beta_i &= \frac{\partial f_i}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{y_i - y_0}{f_i(x_0, y_0, z_0)},\\ \gamma_i &= \frac{\partial f_i}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{z_i - z_0}{f_i(x_0, y_0, z_0)}\end{aligned} \tag{8}$$

2.2 ドップラーの観測モデル

目標とは異なる位置にある i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の速度ベクトル $\dot{\underline{B}}_i$（既知）を，式 (1) を時間微分して，次式で表す．

$$\dot{\underline{B}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)^T \tag{9}$$

つぎに，目標の速度ベクトルを，式 (2) を時間微分して，次式で表す．

$$\underline{\dot{L}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T \tag{10}$$

次の性質は，i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の送受信機間のドップラーの真値の算出式を示す．なお，証明は，式 (4) を時間 t で微分して得られる．

（性質 2）i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の送受信機間のドップラーの真値を $\dot{R}_i$ とすれば，次式を得る．

$$\dot{R}_i = g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \tag{11}$$

ここで，次式を定義する．

$$g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{(x_i - x)(\dot{x}_i - \dot{x}) + (y_i - y)(\dot{y}_i - \dot{y}) + (z_i - z)(\dot{z}_i - \dot{z})}{f_i(x, y, z)} \tag{12}$$

すると，i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 番目の送受信機間のドップラーの観測値 $\dot{R}_{io}$ は次式となる．

$$\dot{R}_{io} = \dot{R}_i + \dot{v}_i \tag{13}$$

なお，$\dot{v}_i$ はドップラーのランダムな観測誤差である．

次の性質は，ドップラーを，目標の位置と速度とで線形近似した結果を示す．

（性質 3）速度推定のための初期値を $\dot{x}_0$，$\dot{y}_0$，$\dot{z}_0$ とすると，次式を得る．なお，x_0，y_0，z_0 については，性質 1 を参照．

$$\begin{aligned} \Delta\dot{R}_{io} &\approx \alpha_{il}(x - x_0) + \beta_{il}(y - y_0) + \gamma_{il}(z - z_0) \\ &+ \alpha_i(\dot{x} - \dot{x}_0) + \beta_i(\dot{y} - \dot{y}_0) + \gamma_i(\dot{z} - \dot{z}_0) + \dot{v}_i \end{aligned} \tag{14}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Delta\dot{R}_{io} = \dot{R}_{io} - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{il} &= -\frac{(\dot{x}_i - \dot{x}_0) f_i(x_0, y_0, z_0) - (x_i - x_0) g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{f_i(x_0, y_0, z_0)^2}, \\ \beta_{il} &= -\frac{(\dot{y}_i - \dot{y}_0) f_i(x_0, y_0, z_0) - (y_i - y_0) g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{f_i(x_0, y_0, z_0)^2}, \\ \gamma_{il} &= -\frac{(\dot{z}_i - \dot{z}_0) f_i(x_0, y_0, z_0) - (z_i - z_0) g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{f_i(x_0, y_0, z_0)^2} \end{aligned} \tag{16}$$

（証明）式 (13) 及び (11) より，次式を得る．

$$\begin{aligned} &\dot{R}_{io} - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ &= g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) + \dot{v}_i \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，全微分の公式を使用して，式 (12) 及び (8) より，次式を得る．

$$\begin{aligned} &g_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - g_i(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ &\approx \alpha_{il}(x - x_0) + \beta_{il}(y - y_0) + \gamma_{il}(z - z_0) \\ &+ \alpha_i(\dot{x} - \dot{x}_0) + \beta_i(\dot{y} - \dot{y}_0) + \gamma_i(\dot{z} - \dot{z}_0) \end{aligned} \tag{18}$$

ここで，次式を定義する．

$$\begin{aligned} \alpha_{il} &= \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ \beta_{il} &= \frac{\partial g_i}{\partial y}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ \gamma_{il} &= \frac{\partial g_i}{\partial z}(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \end{aligned} \tag{19}$$

式 (17) に，式 (15)，(18)，(19) 及び (12) を使用して，結論を得る．（証明終）

2.3 線形モデル

距離及びドップラー観測値を n 対得るとすれば，式 (6) 及び (14) より，次式の線形観測モデルを得る．

$$\underline{b} = A\underline{a} + \underline{v} \tag{20}$$

ここで，

$$\underline{b} = (\Delta R_{1o}, \cdots, \Delta R_{no}, \Delta\dot{R}_{1o}, \cdots, \Delta\dot{R}_{no})^T \tag{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1l} & \beta_{2l} & \gamma_{2l} & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{nl} & \beta_{nl} & \gamma_{nl} & 0 & \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\underline{a} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0, S, \dot{x} - \dot{x}_0, \dot{y} - \dot{y}_0, \dot{z} - \dot{z}_0)^T \tag{23}$$

$$\underline{v}_l = (v_1, \cdots, v_n)^T \tag{24}$$

$$\underline{v}_d = (\dot{v}_1, \cdots, \dot{v}_n)^T \tag{25}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{v}_l \\ \underline{v}_d \end{pmatrix} \tag{26}$$

で，行列 A を配置行列と呼ぶことにする．なお，異なる送受信機間の観測雑音は無相関として，次式を仮定する．ここで，$E[\ ]$ は平均，$\underline{0}$ は零ベクトル，

$diag\{a_1, \cdots, a_n\}$ は対角成分を $a_1, \cdots, a_n$ とする対角行列を表す.

$$E[\underline{v}] = \underline{0} \tag{27}$$

$$V = E\left[\underline{v}\,\underline{v}^T\right] = \begin{pmatrix} V_l & V_{ld} \\ V_{ld} & V_d \end{pmatrix} \tag{28}$$

なお，i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 番目の送受信機間の距離観測雑音の分散を σ_i^2，ドップラー観測雑音の分散を σ_{id}^2，距離とドップラーの観測雑音の相関係数を ρ_i として，

$$V_l = E\left[\underline{v}_l \underline{v}_l^T\right] = diag\{\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2\} \tag{29}$$

$$V_d = E\left[\underline{v}_d \underline{v}_d^T\right] = diag\{\sigma_{1d}^2, \cdots, \sigma_{nd}^2\} \tag{30}$$

$$V_{ld} = E\left[\underline{v}_l \underline{v}_d^T\right] = diag\{\rho_1\sigma_1\sigma_{1d}, \cdots, \rho_n\sigma_n\sigma_{nd}\} \tag{31}$$

である．ここで，記述を簡単にするため，

$$\underline{\omega}(i) = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \tag{32}$$

$$\underline{\delta}(i) = (\underline{\omega}(i), 1) \tag{33}$$

$$\underline{\kappa}(i) = (\alpha_{il}, \beta_{il}, \gamma_{il}, 0) \tag{34}$$

$$A_l = \begin{pmatrix} \underline{\delta}(1) \\ \vdots \\ \underline{\delta}(n) \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$A_{ld} = \begin{pmatrix} \underline{\kappa}(1) \\ \vdots \\ \underline{\kappa}(n) \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$A_d = \begin{pmatrix} \underline{\omega}(1) \\ \vdots \\ \underline{\omega}(n) \end{pmatrix} \tag{37}$$

とし，$O_{m,n}$ を $m \times n$ の零行列とすれば，式 (22) より，次式を得る．

$$A = \begin{pmatrix} A_l & O_{n,3} \\ A_{ld} & A_d \end{pmatrix} \tag{38}$$

また，

$$\underline{\phi}(i) = (\underline{\delta}(i), O_{1,3}) \tag{39}$$

$$\underline{\varphi}(i) = (\underline{\kappa}(i), \underline{\omega}(i)) \tag{40}$$

とすれば，次式を得る．

$$A = \begin{pmatrix} \underline{\phi}(1) \\ \vdots \\ \underline{\phi}(n) \\ \underline{\varphi}(1) \\ \vdots \\ \underline{\varphi}(n) \end{pmatrix} \tag{41}$$

2.4 重み付き最小自乗解

次の性質は，重み付き線形最小自乗法により，目標の位置及び速度が算出できることを示す [5], [6], [9]～[12].

（性質 4）式 (20) において，重み付き最小自乗法 [13], [14] により，次式を最小とする $\underline{\hat{a}}$ を推定する.

$$J = (\underline{b} - A\underline{\hat{a}})^T V^{-1} (\underline{b} - A\underline{\hat{a}}) \tag{42}$$

解は，$A^T V^{-1} A$ が正則ならば，次式である.

$$\underline{\hat{a}} = (A^T V^{-1} A)^{-1} A^T V^{-1} \underline{b} \tag{43}$$

次の性質は，算出した目標位置及び速度が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す [5], [6], [9]～[12].

（性質 5）式 (43) は，次の性質を有する.

$$E[\underline{\hat{a}}] = \underline{a} \tag{44}$$

$$E\left[(\underline{\hat{a}} - \underline{a})(\underline{\hat{a}} - \underline{a})^T\right] = (A^T V^{-1} A)^{-1} \tag{45}$$

3. 推定可能のための条件

ここでは，重み付き線形最小自乗法により解が算出できるための条件について述べる.

3.1 解の存在条件

ここで，本論文に使用する前提条件を次に示す.

（前提条件 1）$\underline{\delta}(i)$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) のうち．いずれか 4 個が 1 次独立とする．なお，$4 \leq n$ とする.

次の性質は，式 (35) の行列を構成する行ベクトルの 1 次独立性より，式 (37) の行列を構成する行ベクトルの 1 次独立性が判定できることを示す.

（性質 6）前提条件 1 が成立するとする．$\underline{\delta}(i)$，$\underline{\delta}(j)$，$\underline{\delta}(k)$，$\underline{\delta}(l)$ ($i < j < k < l$) が 1 次独立とすれば，$\underline{\omega}(i)$，$\underline{\omega}(j)$，$\underline{\omega}(k)$，$\underline{\omega}(l)$ のうち，いずれか 3 個は 1 次独立である．また，行列 A の階数は 7 である.

（証明）行列 D の行列式を $|D|$ とすれば，式 (33) より，次式を得る.

$$\begin{vmatrix} \underline{\delta}(i) \\ \underline{\delta}(j) \\ \underline{\delta}(k) \\ \underline{\delta}(l) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \underline{\omega}(j) \\ \underline{\omega}(k) \\ \underline{\omega}(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\omega}(i) \\ \underline{\omega}(k) \\ \underline{\omega}(l) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underline{\omega}(i) \\ \underline{\omega}(j) \\ \underline{\omega}(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{\omega}(i) \\ \underline{\omega}(j) \\ \underline{\omega}(k) \end{vmatrix} \tag{46}$$

ここで，$\underline{\delta}(i)$，$\underline{\delta}(j)$，$\underline{\delta}(k)$，$\underline{\delta}(l)$ が 1 次独立とする．もし，$\underline{\omega}(i)$，$\underline{\omega}(j)$，$\underline{\omega}(k)$，$\underline{\omega}(l)$ のいずれの 3 個も 1 次従属であれば，式 (46) の右辺の 4 個の行列式は全て 0 である．したがって，式 (46) は 0 となり，$\underline{\delta}(i)$，$\underline{\delta}(j)$，$\underline{\delta}(k)$，$\underline{\delta}(l)$ は 1 次従属となる．この結果，$\underline{\omega}(i)$，$\underline{\omega}(j)$，$\underline{\omega}(k)$，$\underline{\omega}(l)$ のうち，いずれか 3 個は 1 次独立であり，これを $\underline{\omega}(p)$，$\underline{\omega}(q)$，$\underline{\omega}(r)$ とする．

ここで，

$$a_1\underline{\phi}(i) + a_2\underline{\phi}(j) + a_3\underline{\phi}(k) + a_4\underline{\phi}(l) + b_1\underline{\varphi}(p) + b_2\underline{\varphi}(q) + b_3\underline{\varphi}(r) = \underline{0} \tag{47}$$

とすると，式 (39) 及び (40) より次式を得る．

$$b_1\underline{\omega}(p) + b_2\underline{\omega}(q) + b_3\underline{\omega}(r) = \underline{0} \tag{48}$$

式 (48) 及び $\underline{\omega}(p)$，$\underline{\omega}(q)$，$\underline{\omega}(r)$ は 1 次独立より，次式を得る．

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0 \tag{49}$$

式 (47) に，式 (49) を代入し式 (39) を使用すれば，次式を得る．

$$a_1\underline{\delta}(i) + a_2\underline{\delta}(j) + a_3\underline{\delta}(k) + a_4\underline{\delta}(l) = \underline{0} \tag{50}$$

式 (50) 及び $\underline{\delta}(i)$，$\underline{\delta}(j)$，$\underline{\delta}(k)$，$\underline{\delta}(l)$ は 1 次独立より，次式を得る．

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \tag{51}$$

式 (47) に，式 (49) 及び (51) を使用して，$\underline{\phi}(i)$，$\underline{\phi}(j)$，$\underline{\phi}(k)$，$\underline{\phi}(l)$，$\underline{\varphi}(p)$，$\underline{\varphi}(q)$，$\underline{\varphi}(r)$ は 1 次独立である．したがって，$2n \times 7$ の行列 A の階数は 7 である．（証明終）

次の性質で $Q = V^{-1}$ の場合を考えれば，観測雑音共分散行列 V が正値対称行列のとき，行列 A_l の行ベクトルにより，$A^TV^{-1}A$ の逆行列が算出可能かを判定できることを示す．なお，証明は，性質 6 を使用すれば，文献 [12] の性質 4 と同様であるので，省略する．

（性質 7）前提条件 1 が成立するとする．また，Q は，$2n \times 2n$ の任意の正値対称行列とする．このとき，A^TQA は正則である．逆に，行列 A の階数が 6 以下であれば，A^TQA は正則ではない．

ところで，式 (32) の $\underline{\omega}(i)$ は，式 (8) 及び (4) が示すように，送信源と受信機の相対的な位置関係で決まる単位ベクトルである．このため，$\underline{\omega}(i)$ のみを使用して，$2n \times 2n$ の正値対称行列 Q に対して，A^TQA の逆行列が算出可能を判定できれば，幾何学的な意味が理解しやすくなる．

次の性質は，$\underline{\omega}(i)$ を使用して，A^TQA の逆行列が算出可能かを判定できることを示す．

（性質 8）Q は，$2n \times 2n$ の任意の正値対称行列とする．また，k は，$1, 2, \cdots, n$ のいずれかとする．このとき，$\underline{\omega}(i) - \underline{\omega}(k)$ $(i = 1, 2, \cdots, n, i \neq k)$ のうち，いずれか 3 個が 1 次独立であれば，$A^{-1}QA$ は正則である．なお，$4 \leq n$ とする．

（証明）式 (32) 及び (33) より，次式を得る．

$$\begin{vmatrix} \underline{\delta}(j_1) \\ \underline{\delta}(j_2) \\ \underline{\delta}(j_3) \\ \underline{\delta}(j_4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\delta}(j_1) - \underline{\delta}(j_4) \\ \underline{\delta}(j_2) - \underline{\delta}(j_4) \\ \underline{\delta}(j_3) - \underline{\delta}(j_4) \\ \underline{\delta}(j_4) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \underline{\omega}(j_1) - \underline{\omega}(j_4) & 0 \\ \underline{\omega}(j_2) - \underline{\omega}(j_4) & 0 \\ \underline{\omega}(j_3) - \underline{\omega}(j_4) & 0 \\ \underline{\omega}(j_4) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\omega}(j_1) - \underline{\omega}(j_4) \\ \underline{\omega}(j_2) - \underline{\omega}(j_4) \\ \underline{\omega}(j_3) - \underline{\omega}(j_4) \end{vmatrix} \tag{52}$$

式 (52) において，最初の行列式が 0 ではないことと，最後の行列式が 0 ではないこととは等価である．この結果，正方行列を構成する行ベクトルが 1 次独立である必要十分条件はその行列式が 0 ではないことを使用し，性質 7 より，結論を得る．（証明終）

次の性質は，$\underline{\omega}(i)$ を使用して，A^TQA の逆行列が算出不可能かを判定できることを示す．

（性質 9）Q は，$2n \times 2n$ の任意の正値対称行列とする．このとき，$\underline{\omega}(i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ のいずれの 3 個も 1 次従属であれば，A^TQA は正則ではない．なお，$4 \leq n$ とする．

（証明）行階数は列階数と同一の値との階数の性質を使用して，式 (37) より，行列 A_d の第 1，第 2，第 3 列のベクトルは 1 次従属である．したがって，式 (38) より行列 A の第 5，第 6，第 7 列のベクトルも 1 次従属であり，行列 A の階数は 6 以下である．この結果，性質 7 を使用して，結論を得る．（証明終）

3.2 観測雑音共分散行列の性質

重み付き線形最小自乗法を使用するには，観測雑音共分散行列 V が正値でなければならない．次の性質は，V が正値となる条件を示す．なお，$D > 0$ は行列

D が正値対称行列，$D \geq 0$ は行列 D が半正値対称行列を表す．なお，付録に線形代数の諸結果をまとめた．
（性質 10）$\sigma_i > 0$，$\sigma_{id} > 0$，$|\rho_i| < 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ならば，次式が成立する．

$$V > 0 \tag{53}$$

（証明）$\underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})^T$ とすれば，式 (28)～(31) より，次式を得る．

$$(V\underline{x}, \underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}(\sigma_i^2 x_i^2 + 2\rho_i\sigma_i\sigma_{id}x_i x_{n+i} + \sigma_{id}^2 x_{n+i}^2) \tag{54}$$

ここで，次式を得る．

$$\begin{aligned}
&\sigma_i^2 x_i^2 + 2\rho_i\sigma_i\sigma_{id}x_i x_{n+i} + \sigma_{id}^2 x_{n+i}^2 \\
&= \begin{cases} (1-\rho_i)\sigma_i^2 x_i^2 + (1-\rho_i)\sigma_{id}^2 x_{n+i}^2 \\ \quad + \rho_i(\sigma_i x_i + \sigma_{id}x_{n+i})^2 \geq 0 \quad (0 \leq \rho_i < 1) \\ (1+\rho_i)\sigma_i^2 x_i^2 + (1+\rho_i)\sigma_{id}^2 x_{n+i}^2 \\ \quad - \rho_i(\sigma_i x_i - \sigma_{id}x_{n+i})^2 \geq 0 \quad (-1 < \rho_i \leq 0) \end{cases}
\end{aligned} \tag{55}$$

更に，$(x_i, x_{id}) \neq \underline{0}$ ならば，式 (55) より，次式を得る．

$$\sigma_i^2 x_i^2 + 2\rho_i\sigma_i\sigma_{id}x_i x_{n+i} + \sigma_{id}^2 x_{n+i}^2 > 0 \quad (\sigma_i > 0,\ \sigma_{id} > 0,\ |\rho_i| < 1) \tag{56}$$

式 (54)～(56) より，式 (53) を得る．（証明終）

次の性質は，観測雑音共分散行列の逆行列の算出式及びその性質を示す．
（性質 11）$\sigma_i > 0$，$\sigma_{id} > 0$，$|\rho_i| < 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする．すると，次式を得る．

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix} \tag{57}$$

ここで，

$$G_{11} = diag\left\{\frac{1}{(1-\rho_1^2)\sigma_1^2}, \cdots, \frac{1}{(1-\rho_n^2)\sigma_n^2}\right\} \tag{58}$$

$$G_{12} = diag\left\{-\frac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)\sigma_1\sigma_{1d}}, \cdots, -\frac{\rho_n}{(1-\rho_n^2)\sigma_n\sigma_{nd}}\right\} \tag{59}$$

$$G_{22} = diag\left\{\frac{1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{1d}^2}, \cdots, \frac{1}{(1-\rho_n^2)\sigma_{nd}^2}\right\} \tag{60}$$

である．また，次式を得る．

$$V_l^{-1} = diag\{1/\sigma_1^2, \cdots, 1/\sigma_n^2\} \tag{61}$$

$$\begin{aligned} G &= G_{11} - V_l^{-1} \\ &= diag\left\{\frac{\rho_1^2}{(1-\rho_1^2)\sigma_1^2}, \cdots, \frac{\rho_n^2}{(1-\rho_n^2)\sigma_n^2}\right\} \geq 0 \end{aligned} \tag{62}$$

（証明）式 (28)～(31) 及び (57)～(60) より，式 (28) と (57) を乗算して単位行列を得るので，式 (57) を得る．

また，式 (29) より，式 (61) を得る．更に，式 (58) 及び (61) より，式 (62) を得る．（証明終）

4. 位置推定精度

ここでは，距離のみ観測の TOA と，距離及びドップラー観測の TOA の位置推定精度について述べる．

4.1 距離のみを観測する場合の TOA

距離観測値を n 個得るとすれば，式 (6) 及び (24) を使用して，次式の線形観測モデルを得る．

$$\underline{b}_l = A_l\underline{a}_l + \underline{v}_l \tag{63}$$

ここで，次式を定義する．

$$\underline{b}_l = (\Delta R_{1o}, \cdots, \Delta R_{no})^T \tag{64}$$

$$\underline{a}_l = (x - x_0, y - y_0, z - z_0, S)^T \tag{65}$$

次の性質は，重み付き線形最小自乗法により，目標の位置が算出できることを示す [5], [6], [9]～[12]．また，距離のみ観測の TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば，前提条件 1 が成立することを示す．
（性質 12）式 (63) において，重み付き最小自乗法 [13], [14] により，次式を最小とする $\hat{\underline{a}}_l$ を推定する．

$$J_l = (\underline{b}_l - A_l\hat{\underline{a}}_l)^T V_l^{-1}(\underline{b}_l - A_l\hat{\underline{a}}_l) \tag{66}$$

解は，$A_l^T V_l^{-1} A_l$ が正則ならば，次式である．なお，前提条件 1 は，$A_l^T V_l^{-1} A_l$ は正則であるための必要十分条件である [12].

$$\hat{\underline{a}}_l = (A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} A_l^T V_l^{-1}\underline{b}_l \tag{67}$$

次の性質は，重み付き線形最小自乗法により算出した目標位置が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す [5], [6], [9]～[12].
（性質 13）前提条件 1 が成立するならば，式 (67) は，次の性質を有する．

$$E[\hat{\underline{a}}_l] = \underline{a}_l \tag{68}$$

$$E\left[(\hat{\underline{a}}_l - \underline{a}_l)(\hat{\underline{a}}_l - \underline{a}_l)^T\right] = (A_l^T V_l^{-1} A_l)^{-1} > 0 \tag{69}$$

4. 2 ドップラー観測の場合の測位精度

まず，$n \times n$ の単位行列を I_n として，

$$L = \begin{pmatrix} I_n & 0I_n \end{pmatrix} \tag{70}$$

とすれば，式 (64) と (21)，式 (24) と (26) をそれぞれ比較して，次式を得る．

$$\underline{b}_l = L\underline{b} \tag{71}$$

$$\underline{v}_l = L\underline{v} \tag{72}$$

つぎに，

$$N = \begin{pmatrix} I_4 & O_{4,3} \end{pmatrix} \tag{73}$$

とすれば，式 (23) と (65) を比較して，次式を得る．

$$\underline{a}_l = N\underline{a} \tag{74}$$

すると，

$$\hat{\underline{a}}_D = N\hat{\underline{a}} \tag{75}$$

は，距離及びドップラーを観測する場合の位置及び時計オフセット誤差による距離のバイアス誤差の推定値である．

次の性質は，距離及びドップラーを観測する場合の重み付き最小自乗法による測位が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す．

（性質 14）式 (75) は，次の性質を有する．

$$E[\hat{\underline{a}}_D] = \underline{a}_l \tag{76}$$

$$E\Big[(\hat{\underline{a}}_D - \underline{a}_l)(\hat{\underline{a}}_D - \underline{a}_l)^T\Big] = N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T \tag{77}$$

（証明）式 (75) 及び (44) より，次式を得る．

$$E[\hat{\underline{a}}_D] = N\underline{a}_l \tag{78}$$

式 (78) 及び (74) より，式 (76) を得る．

式 (75) 及び (74) より，次式を得る．

$$\hat{\underline{a}}_D - \underline{a}_l = N(\hat{\underline{a}} - \underline{a}) \tag{79}$$

式 (79) 及び (45) より，式 (77) を得る．（証明終）

5. 考　察

ここでは，距離のみを観測する場合の $\hat{\underline{a}}_l$ と，距離とドップラーを観測する場合の $\hat{\underline{a}}_D$ とを比較する．

5. 1 推定可能の条件

性質 12 と性質 7 は，距離のみ観測の TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば，距離とドップラーを複数同時に観測の TOA でも，三次元の位置及び速度が推定可能なことを示す．

この結果は，ドップラーを観測値に使用しても，位置推定が可能となる条件に悪影響はないことを示す．

5. 2 性 能 比 較

式 (68) と (76) は，$\hat{\underline{a}}_l$ も $\hat{\underline{a}}_D$ も，バイアス誤差はないことを示す．

更に，次の性質は，式 (77) 及び (69) より，ドップラーを使用した場合，位置推定精度は，改善することはあっても，劣化はないことを示す．

（性質 15）前提条件 1 が成立するとともに，$\sigma_i > 0$，$\sigma_{id} > 0$，$|\rho_i| < 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ とする．すると，次式を得る，

$$N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T \leq (A_l^TV_l^{-1}A_l)^{-1} \tag{80}$$

（証明）式 (38) 及び (57) より，次式を得る．

$$A^TV^{-1}A = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12}^T & J_{22} \end{pmatrix} \tag{81}$$

ここで，次式を定義する．

$$J_{11} = A_l^TG_{11}A_l + A_{ld}^TG_{12}A_l + A_l^TG_{12}A_{ld} + A_{ld}^TG_{22}A_{ld} \tag{82}$$

$$J_{12} = A_l^TG_{12}A_d + A_{ld}^TG_{22}A_d \tag{83}$$

$$J_{22} = A_d^TG_{22}A_d \tag{84}$$

ところで，性質 10 より V^{-1} は正値対称行列であるので，性質 7 より $A^TV^{-1}A$ も正値対称行列である．したがって，式 (81) の逆行列を付録の式 (A·4) で算出し，式 (73) を使用すれば，次式を得る．

$$N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T = K^{-1} > 0 \tag{85}$$

ここで，次式を定義する．

$$K = J_{11} - J_{12}J_{22}^{-1}J_{12}^T \tag{86}$$

式 (86)，(82) 及び (62) より，次式を得る．

$$K - A_l^TV_l^{-1}A_l = J - J_{12}J_{22}^{-1}J_{12}^T \tag{87}$$

ここで，次式を定義する．

$$J = A_l^TGA_l + A_{ld}^TG_{12}A_l + A_l^TG_{12}A_{ld} + A_{ld}^TG_{22}A_{ld} \tag{88}$$

ところで，

$$G(m)=\begin{pmatrix} G+1/m\cdot I_n & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{pmatrix} \tag{89}$$

とすれば，式 (81) と同様にして，任意の自然数 m に対して，式 (88) を使用して，次式を得る．

$$A^TG(m)A=\begin{pmatrix} J+1/m\cdot A_l^TA_l & J_{12} \\ J_{12}^T & J_{22} \end{pmatrix} \tag{90}$$

ここで，$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $\underline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ に対して，式 (89) より，式 (62)，(59) 及び (60) を使用して，次式を得る．

$$\left(G(m)\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\underline{x}\\ \underline{y}\end{pmatrix}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-\rho_i^2)}\left(\frac{\rho_i}{\sigma_i}x_i-\frac{1}{\sigma_{id}}y_i\right)^2+\frac{1}{m}(\underline{x},\underline{x})\geq 0 \tag{91}$$

式 (91) において，等号が成立するのは，$\underline{x}=\underline{0}$, $\underline{y}=\underline{0}$ のときのみである．すなわち，$G(m)$ は，正値対称行列である．この結果，性質 7 より，$A^TG(m)A$ も，正値対称行列である．したがって，式 (90) に，付録の性質 A·5 を使用して，次式を得る．

$$J+1/m\cdot A_l^TA_l-J_{12}J_{22}^{-1}J_{12}^T>0 \tag{92}$$

式 (87) 及び (92) より，次式を得る．

$$K-A_l^TV_l^{-1}A_l+1/m\cdot A_l^TA_l>0 \tag{93}$$

式 (93) において，極限（$m\rightarrow\infty$）をとり，次式を得る．

$$0\leq K-A_l^TV_l^{-1}A_l \tag{94}$$

式 (69)，(85) 及び (94) より，次式を得る．

$$0<A_l^TV_l^{-1}A_l\leq\left[N(A^TV^{-1}A)^{-1}N^T\right]^{-1} \tag{95}$$

式 (95) より，式 (80) を得る．(証明終)

5.3 数 値 例

次の例は，ドップラーの使用により位置推定精度が改善する場合を示す．

（例 1）簡単のため，二次元の xy 平面で考える．また，距離の観測雑音の分散は 1，ドップラーの観測雑音の分散は a^2，距離とドップラーは無相関，距離バイアスは存在しないとして未知数とせず，測位計算のための初期値は真値とする．ここで，送信機を有する目標の位置 $\underline{L}$ 及び受信機 $\underline{B}_i$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ の位置を次式とする．

$$\underline{B}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \underline{B}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ \underline{B}_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \underline{L}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{96}$$

また，それらの速度ベクトルを，次式とする．

$$\dot{\underline{B}}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \dot{\underline{B}}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \dot{\underline{B}}_3=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \dot{\underline{L}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{97}$$

すると，次式を得る．

$$N\left[A^TV^{-1}A\right]^{-1}N^T$$
$$=\frac{1}{\left(2+\dfrac{1}{8a^2}\right)}\begin{pmatrix}\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{16a^2} & -\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16a^2}\right)\\ -\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16a^2}\right) & \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{16a^2}\end{pmatrix} \tag{98}$$

$$(A_l^TV_l^{-1}A_l)^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{4}\\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\end{pmatrix} \tag{99}$$

なお，式 (98) と (99) の対角成分（推定誤差の分散に相当）において，次式が成立する．

$$\frac{3}{4}-\frac{\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{16a^2}\right)}{\left(2+\dfrac{1}{8a^2}\right)}>0 \tag{100}$$

(証明) 式 (96) と (97) より，仮定を使用し，式 (4)，(8)，(12) 及び (16) を算出すれば，式 (22) 及び (35)～(37) は，次式に対応することが分かる（式 (38) 参照）．

$$A=\begin{pmatrix}A_l & O_{3,2}\\ A_{ld} & A_l\end{pmatrix},$$
$$A_l=A_d=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \tag{101}$$
$$A_{ld}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

また，観測雑音の仮定より，式 (28) 及び (29) は，

次式に対応する．

$$V = \begin{pmatrix} I_3 & 0I_3 \\ 0I_3 & a^2 I_3 \end{pmatrix},\ V_l = I_3 \tag{102}$$

式 (101) 及び (102) より，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A = \begin{pmatrix} A_l^T A_l + \frac{1}{a^2} A_{ld}^T A_{ld} & \frac{1}{a^2} A_{ld}^T A_l \\ \frac{1}{a^2} A_l^T A_{ld} & \frac{1}{a^2} A_l^T A_l \end{pmatrix} \tag{103}$$

$$A_l^T V_l^{-1} A_l = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \tag{104}$$

式 (86)，(81)，(103) 及び (101) より，次式を得る．

$$K = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{16a^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{105}$$

式 (85) 及び (105) より，式 (98) を得る．また，式 (104) より，式 (99) を得る．(証明終)

6. む す び

本論文では，Taylor 展開推定法において，距離のみを観測する TOA で測位が可能な送受信機の配置ならば，距離とドップラーを複数同時に観測し，三次元の位置及び速度を推定可能なことを示した．また，この場合，ドップラーの観測精度や送受信機の配置がどのような場合でも，ドップラーの使用による位置推定精度は，改善することはあっても劣化はないことを示した．なお，送受信機間でマルチパスの影響はなく，時計オフセット誤差による距離バイアス誤差以外は，距離もドップラーもランダム誤差のみ存在とするとした．以上の結果，ドップラーの使用は，Taylor 展開推定法において，有効なことが分かった．

文　献

[1] S.S. Blackman and R. Popoli, Design and Analysis of Modern Tracking Systems, ArtechHouse, Boston, 1999.

[2] 小菅義夫，“レーダによる単一目標追尾法の現状と将来，” 信学論（B），vol.J93-B, no.11, pp.1504–1511, Nov. 2010.

[3] 小菅義夫，“位置及び速度を観測値とする六次元カルマンフィルタの過渡応答，” 信学論（B），vol.J96-B, no.11, pp.1294–1303, Nov. 2013.

[4] 小菅義夫，“位置及び速度を観測値とする九次元カルマンフィルタの過渡応答，” 信学論（B），vol.J97-B, no.7, pp.565–573, July 2014.

[5] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[6] 佐田達典，GPS 測量技術，オーム社，東京，2003.

[7] 西谷芳雄，電波計器，成山堂書店，東京，2002.

[8] 安田明生，“GPS の現状と展望，” 信学誌，vol.82, no.12, pp.1207–1215, Dec. 1999.

[9] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[10] 福島荘之介，理解するための GPS 測位計算プログラム入門（その 3）測位計算のはなし，航空無線，no.36, 夏期，2003.

[11] 坂井丈泰，GPS 技術入門，東京電機大学出版局，東京，2003.

[12] 小菅義夫，“特異値による TOA 測位精度の解析，” 信学論（B），vol.J97-B, no.3, pp.333–340, March 2014.

[13] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[14] 中川　徹，小柳義夫，最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版会，東京，1982.

[15] I. Shames, et al., “Doppler shift target localization,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.49, no.1, pp.266–276, Jan. 2013.

付　　録

ここでは，線形代数の諸結果を記述する．なお，$(\underline{x}, \underline{y})$ はベクトル $\underline{x}$，$\underline{y}$ の内積，$\underline{0}$ は零ベクトルを表すとする．なお，行列の要素が行列であるブロック行列（block matrix）の性質については，文献 [9] が参照できる．

（定義 A·1）D を $n \times n$ の実対称行列とし，任意の n 次元ベクトル $\underline{x}$ に対して，次式が成立するとき，D を半正値対称行列あるいは半正値と呼び，$D \geq 0$ と書く．また，$D_1 - D_2 \geq 0$ を $D_1 \geq D_2$ と書く．

$$(D\underline{x}, \underline{x}) \geq 0 \tag{A·1}$$

（定義 A·2）D を $n \times n$ の実対称行列とし，任意の n 次元ベクトル $\underline{x}$（ただし，$\underline{x} \neq \underline{0}$）に対して，次式が成立するとき，$D$ を正値対称行列あるいは正値と呼び，$D > 0$ と書く．また，$D_1 - D_2 > 0$ を $D_1 > D_2$ と書く．

$$(D\underline{x}, \underline{x}) > 0 \tag{A·2}$$

（性質 A·1）D が半正値と，D の固有値が全て非負は同値である．

（性質 A·2）D が正値と，D の固有値が全て正は同値である．

（性質 A·3）$D_1 \geq D_2$ かつ，$D_2 \geq D_3$ のとき，$D_1 \geq D_3$ である．また，$D_1 \geq D_2$ かつ，$D_2 \geq D_1$ のとき，$D_1 = D_2$ である．
（性質 A·4）$D_1 \geq D_2 > 0$ ならば，$D_2^{-1} \geq D_1^{-1} > 0$ である．
（性質 A·5）半正値対称行列 D が，正則と正値は同値である．
（性質 A·6）正値対称行列 D は，次式とする．

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & D_{22} \end{pmatrix} \quad \text{(A·3)}$$

ここで，D_{11}，D_{22} は正方行列とする．すると，次式が成立する [9]．

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & -S^{-1}D_{12}D_{22}^{-1} \\ -D_{22}^{-1}D_{12}^T S^{-1} & D_{22}^{-1} + D_{22}^{-1}D_{12}^T S^{-1} D_{12} D_{22}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{(A·4)}$$

なお，

$$S = D_{11} - D_{12}D_{22}^{-1}D_{12}^T > 0 \quad \text{(A·5)}$$

である．また，D_{11}，D_{22} は正値対称行列である．

（平成 27 年 1 月 11 日受付，3 月 9 日再受付）

小菅　義夫　（正員）

昭 47 早大・理工・数学卒．昭 49 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平 16 長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員．電通大特任教授．工博．IEEE シニア会員．

古賀　　禎　（正員）

平 5 年東京理科大・理工・電気卒．平 7 年同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入所．平 13 年カリフォルニア大デービス校客員研究員．工博．二次監視レーダ，空港面監視システムの研究に従事．

宮崎　裕己　（正員）

平 3 信州大・工卒．平 5 同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入省．以来，二次監視レーダやマルチラテレーションに関する研究開発に従事．電気学会会員．

秋田　　学　（正員）

平 17 大阪大・工・電子情報エネルギー工卒，平 20 同大大学院博士前期課程了．平 23 同大大学院博士後期課程了．平 24 ニューメキシコ工科大学博士研究員．平 25 電気通信大学大学院情報理工学研究科助教．

稲葉　敬之　（正員）

昭 56 東工大・理・物理卒，昭 58 同大大学院修士課程了．同年，三菱電機（株）入社．平 20 年 4 月より電通大教授．工博．レーダ信号処理，超電導磁気センサ信号処理，アダプティブアレー信号処理，車載レーダの研究開発等に従事．IEEE シニア会員．