論　文

位置と速度を観測値とする位置のn階微分値を一定とする追尾フィルタの過渡応答

小菅　義夫[†,††]　古賀　禎[†]　宮崎　裕己[†]　秋田　学[††]
稲葉　敬之[††]

Transient Response of an (n+1)-th Order Tracking Filter with Position and Velocity Measurements

Yoshio KOSUGE[†,††], Tadashi KOGA[†], Hiromi MIYAZAKI[†], Manabu AKITA[††], and Takayuki INABA[††]

あらまし　目標の位置・速度などの真値を推定する追尾フィルタの初期状態での過渡応答について述べる．この性能の改善には，位置のほかに，速度を観測値とする方法が考えられる．実際，等速直線運動モデルや等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタにおいて，初期値を工夫すれば，速度を観測値とすることにより追尾性能が改善可能である．しかし，等ジャーク（加速度の時間微分値）などのより高次の運動モデルについての報告はない．本論文では，目標からの三次元の位置及び速度を観測値とし，サンプリング間隔は不定とした追尾フィルタを重み付き最小自乗法より導出する．なお，目標位置ベクトルのn階時間微分値が一定とした運動モデルを使用した．ここで，nが1のときは等速直線運動モデル，nが2のときは等加速度運動モデルである．また，提案方法では，異なる時刻の約n/2個の観測値から，カルマンフィルタにも使用可能な初期値が算出可能であることを示した．更に，サンプリング間隔あるいは観測精度によらず，速度観測値の使用により，平滑性能は，位置のみを観測値とする場合よりよくなること示した．

キーワード　追尾フィルタ，重み付き最小自乗法，初期値，過渡応答，初期化，目標速度観測値

1. まえがき

目標追尾とは，空間を移動する航空機などの目標からの位置観測値をもとに，ディジタル処理により目標の位置・速度などを推定し，この推定結果をもとに次サンプリング時刻の位置観測値を目標から得ることである [1]～[6]．この目標追尾におけるディジタル処理を，追尾フィルタと呼ぶ [1]～[6]．なお，三次元の目標位置を観測するセンサとして，レーダ，TOA（Time of Arrival）を利用した GPS（Global Positioning System）[7]～[9]，TDOA（Time Difference of Arrival）を利用したマルチラテレーション（Multilateration）[10] などが考えられる．

ここで，初期状態での過渡応答の性能を改善するには，位置のほかに，速度を観測値とする方法が考えられる．実際，等速直線運動モデルや等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタにおいて，初期値を工夫すれば，速度を観測値とすることにより追尾性能が改善可能である [11], [12]．ところで，GPS において，ドップラーを追尾するアルゴリズムが提案されている [13], [14]．この場合，追尾性能評価の目標運動モデルとして，ジャーク（加速度の時間微分値）パルスが正負おのおのに加わるシナリオが使用されている．しかし，等ジャークなどの高次の運動モデルについて，追尾性能が改善可能であるかの報告はない．

なお，ドップラーが検出可能な場合の GPS，マルチラテレーション，異なる位置にある三個以上の HPRF（High Pulse Repetition Frequency）を使用したパルスドップラレーダあるいは航空機自身で計測した移動速度が使用可能な二次監視レーダによる追尾の場合，

† 国立研究開発法人電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaijihigashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan
†† 電気通信大学大学院情報理工学研究科，調布市
Graduate School of Information and Engineering, The University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan

三次元で速度観測値が得られる．

しかし，等加速度運動モデルを使用した追尾において，加速度の初期値として，2 サンプリング分の速度観測値をサンプリング間隔で除算した値を使用すると，かえって性能が悪くなる場合がある [12]．例えば，サンプリング間隔が大きく，位置の観測精度がよい場合である．ところで，位置のみ観測の追尾の場合，初期値算出には，最低 n+1 個の異なるサンプリング時刻の観測値が必要である．このため，位置・速度観測の場合の初期状態での過渡応答の性能改善には，つぎの二つの条件が最低必要である．一つ目は，位置のみ観測の場合より少ないサンプリング数で初期値が算出可能であること．二つ目は，n+1 個の異なるサンプリング時刻の観測値が得られた時点の追尾精度が，位置のみ観測の追尾初期値の精度を下回らないことである．

ところで，目標追尾に使用されるカルマンフィルタは，ベイズ手法の 1 種であり，初期値算出が不可能である [15], [16]．このため，初期値算出には，カルマンフィルタ以外の理論が必要である．なお，複数センサを使用する場合，サンプリング間隔一定あるいは観測値が時系列で得られるとは限らない [17]～[19]．

本論文では，各サンプリング時刻の観測雑音共分散行列で重み付けした位置及び速度などの目標運動諸元の推定誤差の自乗の総和を最小化することにより追尾法を構成する．なお，目標位置ベクトルの n 階時間微分値を一定とした運動モデルを使用した．n が 1 のときは等速直線運動モデル，n が 2 のときは等加速度運動モデル，n が 3 のときは等ジャーク運動モデルである．また，提案方法により，サンプリング間隔及びサンプリング順序が不定でも，約 $n/2$ 個の異なるサンプリング時刻の観測位置及び観測速度があれば，追尾フィルタの初期値が算出可能であることを示す．更に，速度観測値の使用により，初期状態での過渡応答の性能が改善されるかどうかを検討する．更にまた，n が 1 及び 2 のときの上述のカルマンフィルタの初期状態の過渡応答の性能改善と本論文の結果との対応を明確にする．

2. 運動モデルと観測モデル

ここでは，目標位置及び目標速度を観測するとして，三次元空間での，運動モデルと観測モデルについて述べる．なお，$n \times n$ の単位行列を I_n と書く．

2.1 北基準直交座標

東を x 軸の正，北を y 軸の正，水平面（x-y 面）に垂直で上方を z 軸の正に取った直交座標を「北基準直交座標」と呼ぶ．北基準直交座標は慣性直交座標であり，目標運動の記述に便利である．なお，例えば，航空機をレーダで追尾する場合，原点は，レーダの位置である．

2.2 運動モデル

北基準直交座標での目標位置ベクトルの n 階時間微分値を一定としたモデルを次式で定義する．なお，A^T は行列 A の転置行列，t_k はサンプリング時刻（以後，時刻 t_k と呼ぶ）とする．

$$\underline{x}_k = \Phi\left(t_k - t_{k-1}\right)\underline{x}_{k-1} \tag{1}$$

ここで，

・$\underline{x}_k$ は時刻 t_k における目標位置ベクトル $\underline{L}_k = (x_k, y_k, z_k)^T$ 及び目標位置ベクトルの n 階までの時間微分値 $\underline{L}_k^{(i)} = (x_k^{(i)}, y_k^{(i)}, z_k^{(i)})^T$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の真値を表す北基準直交座標での $3(n+1)$ 次元の状態ベクトルで

$$\underline{x}_k = \left(\left[\underline{L}_k\right]^T, \left[\underline{L}_k^{(1)}\right]^T, \cdots, \left[\underline{L}_k^{(n)}\right]^T\right)^T \tag{2}$$

・$\Phi\left(t_k - t_{k-1}\right)$ は，時刻 t_{k-1} より t_k への状態ベクトルの $3\left(n+1\right) \times 3\left(n+1\right)$ の推移行列で，

$$\Phi(t_k - t_{k-1}) = \begin{pmatrix} I_3 & (t_k - t_{k-1})I_3 & \cdots & (t_k - t_{k-1})^n/n! \cdot I_3 \\ 0I_3 & I_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (t_k - t_{k-1})I_3 \\ 0I_3 & \cdots & 0I_3 & I_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である．

2.3 位置及び速度の観測モデル

位置及び速度を観測値とする北基準直交座標での観測モデルを次式で定義する．

$$\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{v}_k \tag{4}$$

ここで，

・$\underline{z}_k$ は時刻 $t_k (k = 0, 1, \cdots)$ における北基準直交座標での目標位置観測ベクトル $\underline{L}_{k,o}$ 及び目標速度観測ベクトル $\underline{V}_{k,o}$ からなり，

$$\underline{z}_k = \left(\left[\underline{L}_{k,o}\right]^T, \left[\underline{V}_{k,o}\right]^T\right)^T \tag{5}$$

・H は $6 \times 3(n+1)$ 観測行列で，

$$H = \begin{pmatrix} I_3 & 0I_3 & 0I_3 & \cdots & 0I_3 \\ 0I_3 & I_3 & 0I_3 & \cdots & 0I_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

・$\underline{v}_k$ は平均 $\underline{0}$（零ベクトル）で誤差共分散行列 B_k の六変量白色正規分布に従う時刻 t_k における北基準直交座標による六次元の観測雑音ベクトルである．

なお，$A > 0$ は行列 A が正値対称行列（行列 A の固有値が全て正と等価），$A \geq 0$ は行列 A が半正値対称行列（行列 A の固有値が全て非負と等価）を示し，$E[\ ]$ は平均を表す記号として，次式を仮定する．

$$B_k = E\left[\underline{v}_k \underline{v}_k^T\right] = \begin{pmatrix} B_{k,l} & B_{k,lv} \\ B_{k,lv}^T & B_{k,v} \end{pmatrix} > 0 \tag{7}$$

ここで，$B_{k,l}$ は時刻 t_k での位置観測雑音共分散行列，$B_{k,v}$ は速度観測雑音共分散行列，$B_{k,lv}$ は位置と速度との観測雑音相関行列である．また，式 (7) より，次式が成立する．

$$B_{k,l} > 0 \tag{8}$$

3. 重み付き最小自乗法

ここでは，重み付き最小自乗法による目標運動諸元の推定法及びその性質について述べる．なお，複数センサを考慮し，観測値が，同時刻で 2 個以上得られる場合もあるとする．

3.1 推定値の存在条件

時刻 $t_i (i = 0, 1, \cdots, k)$ の観測値をもとに，重み付き最小自乗法により，状態ベクトル $\underline{x}_0$ の推定値として，次式を最小にする $\hat{\underline{x}}_0(k)$ を算出する．

$$J_k = \sum_{i=0}^{k} \underline{y}_i^T B_i^{-1} \underline{y}_i \tag{9}$$

ここで，

$$t_i^0 = t_i - t_0 \tag{10}$$

とし，

$$\underline{y}_i = \underline{z}_i - H\Phi\left(t_i^0\right) \hat{\underline{x}}_0(k) \tag{11}$$

とする．すると，式 (9) を $\hat{\underline{x}}_0(k)$ で偏微分した結果を $\underline{0}$ として，次式を得る [15].

$$\Omega_0^k \hat{\underline{x}}_0(k) = \Upsilon_0^k \tag{12}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Omega_0^k = \sum_{i=0}^{k} \Phi\left(t_i^0\right)^T H^T B_i^{-1} H \Phi\left(t_i^0\right) \tag{13}$$

$$\Upsilon_0^k = \sum_{i=0}^{k} \Phi\left(t_i^0\right)^T H^T B_i^{-1} \underline{z}_i \tag{14}$$

ところで，式 (6)，(10) 及び (3) より，次式を得る．

$$H\Phi(t_i^0) \tag{15}$$
$$= \begin{pmatrix} I_3 & (t_i^0) I_3 & (t_i^0)^2/2! \cdot I_3 & \cdots & (t_i^0)^n/n! \cdot I_3 \\ 0I_3 & I_3 & (t_i^0) I_3 & \cdots & (t_i^0)^{n-1}/(n-1)! \cdot I_3 \end{pmatrix}$$

更に，

$$U = \begin{pmatrix} I_3 & 0I_3 \end{pmatrix} \tag{16}$$

とすれば，次式を得る．

$$UH\Phi(t_i^0) \tag{17}$$
$$= \begin{pmatrix} I_3 & (t_i^0) I_3 & (t_i^0)^2/2! \cdot I_3 & \cdots & (t_i^0)^n/n! \cdot I_3 \end{pmatrix}$$

また，目標運動モデルの定義に使用した n に対して，次式を定義する．

$$s = 1/2 \cdot (n+1) \quad \text{when n is an odd number} \tag{18}$$
$$s = 1/2 \cdot n + 1 \quad \text{when n is an even number} \tag{19}$$

次の性質は，$\hat{\underline{x}}_0(k)$ が算出可能であることの証明に使用する．

（性質 1）$t_i (i = 0, 1, \cdots, s-1)$ は，相異なる値とする．すると，次式の $\Xi_n (n = 1, 2, \cdots)$ は正則である．

$$\Xi_n = \Xi_{2s-1} = \begin{pmatrix} H\Phi(t_0^0) \\ H\Phi(t_1^0) \\ \vdots \\ H\Phi(t_{s-1}^0) \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$\Xi_n = \Xi_{2(s-1)} = \begin{pmatrix} H\Phi(t_0^0) \\ H\Phi(t_1^0) \\ \vdots \\ H\Phi(t_{s-2}^0) \\ UH\Phi(t_{s-1}^0) \end{pmatrix} \tag{21}$$

（証明）式 (10) より，次式を得る．

$$t_0^0 = 0 \tag{22}$$

式 (22) 及び (15) より，式 (20) が正則を証明する

には，次式が正則を証明すればよい．

$$\Upsilon_{2s-1} = \begin{pmatrix} \frac{(t_1^0)^2}{2!} & \frac{(t_1^0)^3}{3!} & \cdots & \frac{(t_1^0)^{2s-2}}{(2s-2)!} & \frac{(t_1^0)^{2s-1}}{(2s-1)!} \\ t_1^0 & \frac{(t_1^0)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t_1^0)^{2s-3}}{(2s-3)!} & \frac{(t_1^0)^{2s-2}}{(2s-2)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{(t_{s-1}^0)^2}{2!} & \frac{(t_{s-1}^0)^3}{3!} & \cdots & \frac{(t_{s-1}^0)^{2s-2}}{(2s-2)!} & \frac{(t_{s-1}^0)^{2s-1}}{(2s-1)!} \\ t_{s-1}^0 & \frac{(t_{s-1}^0)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t_{s-1}^0)^{2s-3}}{(2s-3)!} & \frac{(t_{s-1}^0)^{2s-2}}{(2s-2)!} \end{pmatrix} \quad (23)$$

ここで，もし，Υ_{2s-1} が正則でなければ，固有値として 0 をもち，次式が成立する $2s-2$ 次元の固有ベクトル $\underline{x}$ が存在する．

$$\Upsilon_{2s-1}\underline{x} = \underline{0} \quad (24)$$

$$\underline{x} \neq \underline{0} \quad (25)$$

すると，

$$\underline{x} = (x_1, \cdots, x_{2s-2})^T \quad (26)$$

とすれば，式 (23)，(24) 及び (26) より，$f'(t)$ は関数 $f(t)$ の微分を表すとし，次式を得る

$$f(t_i^0) = \sum_{j=1}^{2s-2} \frac{x_j}{(j+1)!}(t_i^0)^{j+1} = 0 \quad (i=1,\cdots,s-1) \quad (27)$$

$$f'(t_i^0) = \sum_{j=1}^{2s-2} \frac{x_j}{j!}(t_i^0)^j = 0 \quad (i=1,\cdots,s-1) \quad (28)$$

ここで，

$$f(t) = \sum_{j=1}^{2s-2} \frac{x_j}{(j+1)!}(t)^{j+1} \quad (29)$$

である．式 (27) 及び (28) より，$f(t) = 0$ は重根 $t_i^0(i = 1,\cdots,s-1)$ をもつ．なお，式 (10) 及び仮定より，次式を得る．

$$t_i^0 \neq 0 \quad (i = 1, \cdots, s-1) \quad (30)$$

また，式 (29) 及び (22) より，$f(t) = 0$ は，式 (30) とは異なる重根 t_0^0 をもつ．この結果，$f(t) = 0$ は重根 $t_i^0\,(i = 0, 1, \cdots, s-1)$ をもつ．すなわち，$2s$ 個以上の根をもつことを示す．一方，式 (25) 及び (26) より，式 (29) の関数 $f(t)$ は多項式であり，$f(t) = 0$ の根は $2s-1$ 個以下である．これは，矛盾しており，Υ_{2s-1} は正則である．

次に，$\Xi_{2(s-1)}$ が正則は，次式が正則を示せばよい．

$$\Upsilon_{2(s-1)} = \begin{pmatrix} \frac{(t_1^0)^2}{2!} & \frac{(t_1^0)^3}{3!} & \cdots & \frac{(t_1^0)^{2s-3}}{(2s-3)!} & \frac{(t_1^0)^{2(s-1)}}{(2s-2)!} \\ t_1^0 & \frac{(t_1^0)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t_1^0)^{2s-4}}{(2s-4)!} & \frac{(t_1^0)^{2s-3}}{(2s-3)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{(t_{s-2}^0)^2}{2!} & \frac{(t_{s-2}^0)^3}{3!} & \cdots & \frac{(t_{s-2}^0)^{2s-3}}{(2s-3)!} & \frac{(t_{s-2}^0)^{2(s-1)}}{(2s-2)!} \\ t_{s-2}^0 & \frac{(t_{s-2}^0)^2}{2!} & \cdots & \frac{(t_{s-2}^0)^{2s-4}}{(2s-4)!} & \frac{(t_{s-2}^0)^{2s-3}}{(2s-3)!} \\ \frac{(t_{s-1}^0)^2}{2!} & \frac{(t_{s-1}^0)^3}{3!} & \cdots & \frac{(t_{s-1}^0)^{2s-3}}{(2s-3)!} & \frac{(t_{s-1}^0)^{2(s-1)}}{(2s-2)!} \end{pmatrix} \quad (31)$$

ここで，もし，$\Upsilon_{2(s-1)}$ が正則でなければ，固有値として 0 をもち，次式が成立する $2s-3$ 次元の固有ベクトル $\underline{x}$ が存在する．

$$\Upsilon_{2(s-1)}\underline{x} = \underline{0} \quad (32)$$

$$\underline{x} \neq \underline{0} \quad (33)$$

すると，

$$\underline{x} = (x_1, \cdots, x_{2s-3})^T \quad (34)$$

とすれば，式 (31)，(32) 及び (34) より，次式を得る

$$f(t_i^0) = \sum_{j=1}^{2s-3} \frac{x_j}{(j+1)!}(t_i^0)^{j+1} = 0 \quad (i=1,\cdots,s-1) \quad (35)$$

$$f'(t_i^0) = \sum_{j=1}^{2s-3} \frac{x_j}{j!}(t_i^0)^j = 0 \quad (i=1,\cdots,s-2) \quad (36)$$

なお，

$$f(t) = \sum_{j=1}^{2s-3} \frac{x_j}{(j+1)!}(t)^{j+1} \quad (37)$$

である．式 (35) 及び (36) より，$f(t) = 0$ は重根 $t_i\,(i = 1, \cdots, s-2)$ 及び単根 t_{s-1}^0 をもつ．また，式 (37) 及び (22) より，$f(t) = 0$ は，式 (30) とは異

なる重根 t_0^0 をもつ．この結果，$f(t)=0$ は重根 $t_i^0\,(i=0,1,\cdots,s-2)$ と単根 t_{s-1}^0 をもつ．すなわち，$2s-1$ 個以上の根をもつことを示す．一方，式 (33) 及び (34) より，式 (37) の関数 $f(t)$ は多項式であり，$f(t)=0$ の根は $2s-2$ 個以下である．これは，矛盾しており，$\Upsilon_{2(s-1)}$ は正則である.（証明終）

次の性質は，式 (18) 及び (19) に基づく，$\underline{\hat{x}}_0(k)$ の算出可能条件を示す.

（性質 2）式 (7) が成立するとする．すると，次式を得る．なお，サンプリング時刻のうち少なくとも s 個は異なるとする．また，$s-1\le k$ とする.

$$\Omega_0^k>0 \tag{38}$$

（証明）k+1 個の時刻のうち，必要なら添え字を取り直し，s 個の異なる時刻を $t_i\,(i=0,1,\cdots,s-1)$ とできる．式 (7) の仮定から $B_i^{-1}>0\,(i=0,1,\cdots,k)$ であるので，式 (13) より，次式を得る.

$$0\le\Omega_0^{s-1}\le\Omega_0^k \tag{39}$$

従って，Ω_0^{s-1} は 0 となる固有値をもたないことを示せば，次式を得るので，式 (39) を使用して，式 (38) が得られる.

$$\Omega_0^{s-1}>0 \tag{40}$$

もし，Ω_0^{s-1} が固有値として 0 をもてば，次式が成立する $3(n+1)$ 次元の固有ベクトル $\underline{x}$ が存在する.

$$\Omega_0^{s-1}\underline{x}=\underline{0} \tag{41}$$

$$\underline{x}\ne\underline{0} \tag{42}$$

ここで，$(\underline{a},\underline{b})$ は，ベクトル $\underline{a},\underline{b}$ の内積を表すとすると，式 (41) 及び (13) より，次式を得る.

$$\left(\sum_{i=0}^{s-1}\Phi\left(t_i^0\right)^TH^TB_i^{-1}H\Phi\left(t_i^0\right)\underline{x},\underline{x}\right)=0 \tag{43}$$

式 (43) より，次式を得る.

$$\sum_{i=0}^{s-1}\left(B_i^{-1}H\Phi\left(t_i^0\right)\underline{x},H\Phi\left(t_i^0\right)\underline{x}\right)=0 \tag{44}$$

$B_i^{-1}>0\,(i=0,1,\cdots,s-1)$ 及び式 (44) より，次式を得る.

$$H\Phi\left(t_i^0\right)\underline{x}=\underline{0}\quad(i=0,1,\cdots,s-1) \tag{45}$$

すると，式 (45) に，式 (20)，(21)，(18)，(19)，(15) 及び (17) を使用して，次式を得る.

$$\Xi_n\underline{x}=\underline{0} \tag{46}$$

式 (46) に，性質 1 を使用して，次式を得る.

$$\underline{x}=\underline{0} \tag{47}$$

式 (42) と，式 (47) は矛盾しており，Ω_0^{s-1} の固有値は 0 とはならない.（証明終）

次の性質は，$\underline{\hat{x}}_0(k)$ の算出式，及びその誤差共分散行列を示す．また，性質 3 の式 (49) は，$\underline{\hat{x}}_0(k)$ が不偏推定量を示す.

（性質 3）式 (7) が成立するとする．すると，次式を得る．なお，サンプリング時刻のうち少なくとも s 個は異なるとする．また，$s-1\le k$ とする.

$$\underline{\hat{x}}_0(k)=\left[\Omega_0^k\right]^{-1}\Upsilon_0^k \tag{48}$$

$$E\left[\underline{\hat{x}}_0(k)\right]=\underline{x}_0 \tag{49}$$

$$E\left[\left(\underline{\hat{x}}_0(k)-\underline{x}_0\right)\left(\underline{\hat{x}}_0(k)-\underline{x}_0\right)^T\right]=\left[\Omega_0^k\right]^{-1} \tag{50}$$

（証明）式 (12) 及び性質 2 より，式 (48) を得る.

つぎに，式 (48) に，式 (14)，(4)，(1)，(10) 及び (13) を使用して，次式を得る.

$$\underline{\hat{x}}_0(k)=\underline{x}_0+\left[\Omega_0^k\right]^{-1}\left[\sum_{i=0}^{k}\Phi(t_i^0)^TH^TB_i^{-1}\underline{v}_i\right] \tag{51}$$

式 (51) 及び観測雑音ベクトルの平均は零ベクトルの仮定を使用し，式 (49) を得る.

一方，式 (51) より，次式を得る.

$$\underline{\hat{x}}_0(k)-\underline{x}_0=\left[\Omega_0^k\right]^{-1}\left[\sum_{i=0}^{k}\Phi(t_i^0)^TH^TB_i^{-1}\underline{v}_i\right] \tag{52}$$

式 (52) より，式 (7) 及び (13) を使用して，式 (50) を得る.（証明終）

3.2 平滑ベクトルと平滑誤差共分散行列

時刻 t_k の平滑ベクトル $\underline{\hat{x}}_k(+)$ は，時刻 t_k までの観測ベクトルに基づく状態ベクトル $\underline{x}_k$ の推定値とする．また，時刻 t_k の平滑誤差共分散行列 $P_k(+)$ は，平滑ベクトル $\underline{\hat{x}}_k(+)$ の推定誤差共分散行列で，次式で定義する.

$$P_k(+)=E\left[\left(\underline{\hat{x}}_k(+)-E\left[\underline{\hat{x}}_k(+)\right]\right)\left(\underline{\hat{x}}_k(+)-E\left[\underline{\hat{x}}_k(+)\right]\right)^T\right] \tag{53}$$

次の性質は，重み付き最小自乗法により追尾フィル

タを構成する場合の平滑値を示す．また，性質 4 の式 (55) は，この平滑値が，不偏推定量であることを示す．

（性質 4）式 (7) が成立するとする．すると，次式を得る．なお，サンプリング時刻のうち少なくとも s 個は異なるとする．また，$s-1 \leq k$ とする．

$$\underline{\hat{x}}_k(+) = \Phi\left(t_k^0\right)\underline{\hat{x}}_0\left(k\right) \tag{54}$$

$$E\left[\underline{\hat{x}}_k\left(+\right)\right] = \Phi\left(t_k^0\right)\underline{x}_0 \tag{55}$$

$$P_k(+) = \Phi\left(t_k^0\right)\left[\Omega_0^k\right]^{-1}\Phi\left(t_k^0\right)^T > 0 \tag{56}$$

（証明）式 (1)，(10) 及び性質 3 より，式 (54) で平滑ベクトルを決めればよい．

式 (54) 及び (49) より，式 (55) を得る．

式 (54) 及び (55) より，次式を得る．

$$\underline{\hat{x}}_k(+)-E[\underline{\hat{x}}_k(+)]=\Phi(t_k^0)\underline{\hat{x}}_0(k)-\Phi(t_k^0)\underline{x}_0 \tag{57}$$

式 (53) に，式 (57) を使用し，次式を得る．

$$\begin{aligned}&P_k(+)\\&=\Phi(t_k^0)E\left[(\underline{\hat{x}}_0(k)-\underline{x}_0)(\underline{\hat{x}}_0(k)-\underline{x}_0)^T\right]\Phi(t_k^0)^T\end{aligned} \tag{58}$$

式 (58) に，式 (50)，(38) 及び (3) を使用して，式 (56) を得る．（証明終）

4. 位置のみを観測値とする追尾

ここでは，重み付き最小自乗法を使用した，位置のみ観測の場合の追尾フィルタについて述べる．

4.1 観測モデル

位置のみを観測値とする北基準直交座標での観測モデルを次式で定義する．

$$\underline{z}_{k,l} = H_l\underline{x}_k + \underline{v}_{k,l} \tag{59}$$

ここで，

・$\underline{z}_{k,l}$ は時刻 t_k $(k=0,1,\cdots)$ における北基準直交座標での目標位置観測ベクトル $\underline{L}_{k,o}$ で（式 (5) 参照），

$$\underline{z}_{k,l} = \underline{L}_{k,o} \tag{60}$$

・H_l は $3\times(n+1)$ の観測行列で，

$$H_l = \begin{pmatrix} I_3 & 0I_3 & \cdots & 0I_3\end{pmatrix} \tag{61}$$

・$\underline{v}_{k,l}$ は平均 $\underline{0}$ で誤差共分散行列 $B_{k,l}$ の三変量白色正規分布に従う時刻 t_k における北基準直交座標による三次元の目標位置観測雑音ベクトルで，式 (8) を仮定する（式 (7) 参照）．

4.2 推定ベクトルと推定誤差共分散行列

次の性質は，時刻 t_k までの目標位置観測ベクトルに基づく重み付き最小自乗法による状態ベクトル $\underline{x}_0$ の推定値 $\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right)$ の算出式，及びその誤差共分散行列を示す [16]．また，性質 5 の式 (65) は，$\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right)$ が不偏推定量であることを示す．この $\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right)$ は次式を最小とする推定値である．

$$J = \sum_{i=0}^{k}\underline{y}_{i,l}^T B_{i,l}^{-1}\underline{y}_{i,l} \tag{62}$$

ここで，次式を定義する．

$$\underline{y}_{i,l} = \underline{z}_{i,l} - H_l\Phi\left(t_i^0\right)\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right) \tag{63}$$

（性質 5）式 (8) が成立するとする．すると，次式を得る．なお，サンプリング時刻のうち少なくとも n+1 個は異なるとする．また，$n \leq k$ とする．

$$\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right) = \left[\Omega_{0,l}^k\right]^{-1}\Upsilon_{0,l}^k \tag{64}$$

$$E\left[\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right)\right] = \underline{x}_0 \tag{65}$$

$$E\left[\left(\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right)-\underline{x}_0\right)\left(\underline{\hat{x}}_{0,l}\left(k\right)-\underline{x}_0\right)^T\right]=\left[\Omega_{0,l}^k\right]^{-1} \tag{66}$$

なお，次式が成立する．

$$\Omega_{0,l}^k > 0 \tag{67}$$

ここで，次式を定義する．

$$\Omega_{0,l}^k = \sum_{i=0}^{k}\Phi\left(t_i^0\right)^T H_l^T B_{i,l}^{-1} H\Phi\left(t_i^0\right) \tag{68}$$

$$\Upsilon_{0,l}^k = \sum_{i=0}^{k}\Phi\left(t_i^0\right)^T H_l^T B_{i,l}^{-1}\underline{z}_{i,l} \tag{69}$$

4.3 平滑ベクトルと平滑誤差共分散行列

位置のみを観測する場合の時刻 t_k の平滑ベクトル $\underline{\hat{x}}_{k,l}(+)$ は，時刻 t_k までの位置観測ベクトルに基づく状態ベクトル $\underline{x}_k$ の推定値とする．また，$P_{k,l}(+)$ は，平滑ベクトル $\underline{\hat{x}}_{k,l}(+)$ の推定誤差共分散行列で，次式で定義する．

$$\begin{aligned}&P_{k,l}(+)\\&=E\Big[\big(\underline{\hat{x}}_{k,l}(+)-E\left[\underline{\hat{x}}_{k,l}(+)\right]\big)\big(\underline{\hat{x}}_{k,l}(+)-E\left[\underline{\hat{x}}_{k,l}(+)\right]\big)^T\Big]\end{aligned} \tag{70}$$

次の性質は，位置のみを観測する場合に，重み付き最小自乗法により追尾フィルタを構成する場合の平滑

値を示す．また，性質 6 の式 (72) は，この平滑値が，不偏推定量であることを示す．

（性質 6）式 (8) が成立するとする．すると，次式を得る．なお，サンプリング時刻のうち少なくとも n+1 個は異なるとする．また，$n \leq k$ とする．

$$\hat{\underline{x}}_{k,l}(+) = \Phi\left(t_k^0\right)\hat{\underline{x}}_{0,l}(k) \tag{71}$$

$$E\left[\hat{\underline{x}}_{k,l}(+)\right] = \Phi\left(t_k^0\right)\underline{x}_0 \tag{72}$$

$$P_{k,l}(+) = \Phi\left(t_k^0\right)\left[\Omega_{0,l}^k\right]^{-1}\Phi\left(t_k^0\right)^T > 0 \tag{73}$$

5. 考　　察

5.1 性 能 比 較

ここでは，位置及び速度を観測値とする場合と，位置のみを観測値とする場合との重み付き最小自乗法の性能比較を行う．まず，行列の要素が行列であるブロック行列（block matrix）[9] の性質を使用して，次の性質を得る [11]．

（性質 7）式 (7) が成立するとする．すると，次式を得る．

$$B_k^{-1} \geq \begin{pmatrix} B_{k,l}^{-1} & 0I_3 \\ 0I_3 & 0I_3 \end{pmatrix} \tag{74}$$

次の性質は，位置及び速度を観測値とする場合の追尾性能は，位置のみを観測値とする場合よりよいことを示す．なお，式 (18) 及び (19) より，$n \geq s\,(n = 1, 2, \cdots)$ である．また，式 (7) が成立すれば，式 (8) は成立する．

（性質 7）式 (7) が成立するとする．すると，次式を得る．なお，サンプリング時刻のうち少なくとも n+1 個は異なるとする．また，$n \leq k$ とする．

$$P_k(+) \leq P_{k,l}(+) \tag{75}$$

（証明）式 (74) より，次式を得る．

$$H^T B_k^{-1} H \geq H^T \begin{pmatrix} B_{k,l}^{-1} & 0I_3 \\ 0I_3 & 0I_3 \end{pmatrix} H \tag{76}$$

式 (6) 及び (61) より，次式を得る．

$$H^T \begin{pmatrix} B_{k,l}^{-1} & 0I_3 \\ 0I_3 & 0I_3 \end{pmatrix} H = H_l^T B_{k,l}^{-1} H_l \tag{77}$$

式 (13) 及び (67) に，式 (76)，(77) 及び (67) を使用して，次式を得る．

$$\Omega_0^k \geq \Omega_{0,l}^k > 0 \tag{78}$$

式 (78) より，次式を得る（一般に，$D_1 \geq D_2 > 0$ ならば，$D_2^{-1} \geq D_1^{-1} > 0$）．

$$\left[\Omega_0^k\right]^{-1} \leq \left[\Omega_{0,l}^k\right]^{-1} \tag{79}$$

式 (79) に，式 (56) 及び (73) を使用し，式 (75) を得る．（証明終）

5.2 観測雑音の平滑誤差への影響

次の性質は，観測精度が良いほど，平滑精度が良いことを示す．

（性質 8）式 (7) が成立するとする．すると，次式を得る．なお，サンプリング時刻のうち少なくとも s 個は異なるとする．また，$s - 1 \leq k$ とする．

$$P_k(+) \leq P_k(+)' \tag{80}$$

ここで，$P_k(+)'$ は，時刻 t_i における観測雑音共分散行列が B_i' のときの，時刻 t_k における平滑誤差共分散行列とし，次式が成立しているとする．

$$B_i \leq B_i' \quad (i = 0, 1, \cdots, k) \tag{81}$$

（証明）式 (81) 及び (7) より，次式を得る．

$$\left[B_i'\right]^{-1} \leq B_i^{-1} \tag{82}$$

式 (82)，(13) 及び (38) より，次式を得る．

$$\begin{aligned} 0 < \left[\Omega_0^k\right]' &= \sum_{i=0}^{k}\Phi\left(t_i^0\right)^T H^T \left[B_i'\right]^{-1} H\Phi\left(t_i^0\right) \\ &\leq \sum_{i=0}^{k}\Phi\left(t_i^0\right)^T H^T B_i^{-1} H\Phi\left(t_i^0\right) = \Omega_0^k \end{aligned} \tag{83}$$

式 (56) に式 (83) を使用して，式 (80) を得る．（証明終）

5.3 カルマンフィルタとの関連

カルマンフィルタでは，追従性能を確保するため，駆動雑音共分散行列を正値として，追尾フィルタを構成するのが一般的である．この場合，$P_k(+)$ は，等速直線運動目標に対する平滑誤差共分散行列とは異なる値となり，平滑性能の指標にはならない．

しかし，本論文の重み付き最小自乗法では，駆動雑音を使用していないため，$P_k(+)$ は，目標位置ベクトルの n 階時間微分値が一定で運動する目標に対する平滑誤差の共分散行列になっている．特に，$P_k(+)$ は，等速直線運動目標に対する平滑誤差共分散行列でもある．この結果，$P_k(+)$ を平滑性能の指標として使用可能である．

なお，カルマンフィルタで追尾する場合，初期値と

して，$\hat{x}_{s-1}(+)$ 及び $P_{s-1}(+)$ を使用すれば良い．更に，観測値が時系列で得られるとすれば，本論文の追尾法は，カルマンフィルタによる追尾法と一致する [15]．この結果，本論文は，等速直線運動モデルや等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタにおいて，速度を観測値とする場合，初期値を重み付き最小自乗法により算出すれば，初期状態の過渡応答が改善する [11], [12] との結果を一般化していることが分かる．

また，本論文の追尾法をスムーザとして使用するには，全サンプリング時刻の観測値を使用して式 (48) を算出したのち，式 (54) により各サンプリング時刻の値を推定すればよい．

6. む す び

本論文では，三次元の目標位置及び目標速度を観測値とし，サンプリング間隔は不定とした初期状態の過渡応答用の追尾フィルタを，重み付き最小自乗法より導出した．なお，目標位置ベクトルの n 階時間微分値が一定とした運動モデルを使用した．また，提案方法では，n の約半分の異なる時刻の観測値から，カルマンフィルタにも使用可能な初期値が算出可能であることを示した．更に，サンプリング間隔あるいは観測精度によらず，速度観測値の使用により，平滑性能は，位置のみを観測値とする場合よりよくなること示した．これらの結果，追尾フィルタの過渡応答の設計が容易になった．

文　　献

[1] S.S. Blackman, Multiple Target Tracking with Radar Applications, Artech House, Dedham, 1986.

[2] Y. Bar-Shalom and T.E. Fortman, Tracking and Data Association, Academic Press, New York, 1988.

[3] P.L. Bogler, Radar Principles with Applications to Tracking Systems, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[4] S.S. Blackman and R. Popoli, Design and Analysis of Modern Tracking Systems, Artech House, Boston, 1999.

[5] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[6] 小菅義夫，“レーダによる単一目標追尾法の現状と将来，” 信学論（B），vol.J93-B, no.11, pp.1504–1511, Nov. 2010.

[7] 坂井丈泰，GPS 技術入門，東京電機大学出版局，東京，2003.

[8] 佐田達典，GPS 測量技術，オーム社，東京，2003.

[9] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[10] 宮崎裕己，小菅義夫，島田浩樹，田中俊幸，“TDOA 測位における基準局選択と測位結果の関連，” 信学論（B），vol.J97-B, no.12, pp.1234–1242, Dec. 2014.

[11] 小菅義夫，“位置及び速度を観測値とする六次元カルマンフィルタの過渡応答，” 信学論（B），vol.J96-B, no.11, pp.1294–1303, Nov. 2013.

[12] 小菅義夫，“位置及び速度を観測値とする九次元カルマンフィルタの過渡応答，” 信学論（B），vol.J97-B, no.7, pp.565–573, July 2014.

[13] V. Vilnrotter, S. Hinedi, and R. Kumar, “Frequency estimation techniques for high dynamic trajectories,” IEEE Trans. Aerosp. Electron.Syst., vol.25, no.4, pp.559–577, July 1989.

[14] S. Hinedi and J.I. Statman, “Digital accumulators in phase and frequency tracking loops,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.26, no.1, pp.169–180, Jan. 1990.

[15] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[16] H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, San Diego, 1970.

[17] 系　正義，辻道信吾，小菅義夫，“広域複数センサシステムにおける遅延データ対処型目標追尾フィルタ，” 信学論（B），vol.J84-B, no.10, pp.1857–1868, Oct. 2001.

[18] Y.B. Shalom, “Update with out-of sequence measurements in tracking: exact solution,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.38, no.3, pp.769–778, July 2002.

[19] Y.B. Shalom, H. Chen, and M. Mallic, “One-step solution for the multistep out-of sequence measurement problem in tracking,” IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol.40, no.1, pp.27–35, Jan. 2004.

（平成 27 年 4 月 16 日受付，6 月 6 日再受付）

小菅　義夫　（正員）

昭 47 早大・理工・数学卒．昭 49 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平 16 長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員．電通大特任教授．工博．IEEE シニア会員．

古賀　　禎　（正員）

平 5 年東京理科大・理工・電気卒．平 7 年同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入所．平 13 年カリフォルニア大デービス校客員研究員．工博．二次監視レーダ，空港面監視システムの研究に従事．

宮崎　裕己　（正員）

平3信州大・工卒．平5同大大学院修士課程了．同年運輸省電子航法研究所入省．以来，二次監視レーダやマルチラテレーションに関する研究開発に従事．電気学会会員．

秋田　　学　（正員）

平17大阪大・工・電子情報エネルギー工卒，平20同大大学院博士前期課程了．平23同大大学院博士後期課程了．平24ニューメキシコ工科大学博士研究員．平25電気通信大学大学院情報理工学研究科助教．

稲葉　敬之　（正員）

昭56東工大・理・物理卒，昭58同大大学院修士課程了．同年，三菱電機（株）入社．平20年4月より電通大教授．工博．レーダ信号処理，超電導磁気センサ信号処理，アダプティブアレー信号処理，車載レーダの研究開発等に従事．IEEEシニア会員．