一般社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
SANE2014-119 (2015-01)

TOA 測位と TDOA 測位の関連

小菅 義夫†,††　古賀 禎†　宮崎 裕己†　秋田 学††　稲葉 敬之††

†電子航法研究所　〒182-0012 東京都調布市深大寺東町 7-42-23

††電気通信大学　〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1

E-mail:

あらまし　本稿は，距離あるいは距離差を同時に複数観測し，移動体である目標の位置を推定する測位法について述べる．TOA（Time of Arrival）測位の場合，三次元の位置と，送受信機間の時計誤差の４個が未知数となる．なお，TOA の代表例は，GPS（Global Positioning System）である．一方，TDOA（Time Difference of Arrival）測位では，距離観測値の差をとり，時計誤差を消去して得た三個以上の送受信機間の距離差を使用して，三次元の位置を推定する．また，距離差のみの観測の場合でも，TDOA では測位可能である．このため，TDOA は，簡便なシステム構築が可能である．しかし，測位精度が劣化しては，使いにくい. 本稿では, TDOA と時計誤差を未知数とする場合の TOA の三次元の位置推定結果は同一であること示す. この結果, TDOA により，TOA と同一性能で，より簡便なシステムが構築できることが分かった.

キーワード　TOA，GPS，測位，TDOA，時計誤差，距離観測値，誤差解析

Relationship between TOA and TDOA Location System

Yoshio KOSUGE†,††, Tadashi KOGA†, Hiromi MIYAZAKI† , Manabu Akita††, and Takayuki Inaba††

† Electronic Navigation Research Institute　7-42-23 Jindaijihigashi-machi, Chofu-shi, Tokyo, 182-0012 Japan

††University of Electro-Communications, 1-5-1 Chofugaoka, Chofu-shi, Tokyo, 182-8585 Japan

E-mail: † kosuge@enri.go.jp　††y-kosuge@uec.ac.jp

Abstract　This paper deals with a range-based target location algorithm. In a TOA (Time of Arrival) system, it is necessary to estimate a receiver clock offset. On the other hand, in a TDOA (Time Difference of Arrival) system, it is not necessary to estimate a receiver clock offset. In this paper, we prove that there is not difference between TOA with the clock offset as an unknown and TDOA in estimated location accuracy of the target even when receivers have different measurement accuracy. As a result, we can design a location system more easily using TDOA .

Keyword　TOA, GPS, location system, TDOA, clock offset, range measurement, error analysis

1. まえがき

本稿は，距離あるいは距離差を同時に複数観測し，移動体である目標の位置を推定する測位法について述べる．目標が受信機を搭載している場合，位置が既知である複数個の送信源との距離を電波伝搬時間より計測する. この代表例は, GPS（Global Positioning System）である[1]～[8]．逆に，目標が送信源の場合，位置が既知である複数個の受信機との距離を計測する．

ところで，TOA（Time of Arrival）測位の場合，三次元空間の位置と，送受信機間の時計誤差の４個が未知数となる．このため，最低４個の距離観測値を使用して，重み付き最小自乗法[9]～[11]により，これら４個の未知数の値を推定する[1]～[8].

一方，TDOA（Time Difference of Arrival）測位では，3 個以上の送受信機間の距離差を使用して，三次元の位置を推定する[12]．なお，TDOA では，送受信機間の時計誤差は，距離差算出の過程で相殺されるため，推定する必要がない．すなわち，TDOA では，三次元空間の位置からなる 3 個が未知数となる．また，距離差のみの観測の場合でも, TDOA では測位可能である.

このため，TDOA は，たとえば，地上システムで航空機からの電波の受信時刻のみを観測すれば測位可能なため，送信時刻の付与・検出が不要で簡便である．すなわち, 世界各国の航空機の既存の送信システムに，新たに送信時刻を付与する必要は無い．また，地上システムも，送信時刻の検出が不要である．しかし，ハードウェアが簡便でも，測位精度が劣化しては，使いにくい.

ところで，4 個以上の n 個の距離観測値が得られる場合，TOA は， n 個の方程式を使用して，4 個の未知数を推定する．なお，この場合 n-1 個の距離差の観測値が得られる．この結果，TDOA は，n-1 個の方程式を使用して, 3 個の未知数を推定する. このため, TOA は，TDOA に比べ，方程式が 1 個余計に使用可能な点

で有利であるが,未知数が1個多い点では不利である.

なお，測位結果の理論解析は， DOP（Dilution of Precision）を使用するのが，一般的であった[3]～[7]. しかし，DOPは，複数の送受信機間で距離観測雑音の分散が同一としているなど，精密な理論解析には適していない[7].

本稿では，4個以上の距離観測値が得られる場合に，TDOAと時計誤差を未知数とする場合のTOAの三次元の位置推定精度の比較結果を明らかにする．なお，本結果は，観測雑音の分散が，送受信機ごとに異なる場合にも適用できる.

2. TOA 測位

ここでは，TOA測位について述べる[1]～[8]. なお，$n \times n$の単位行列をI_nと書くことにする.

2.1. 距離の観測モデル

目標とは異なる位置にある$i(i=1,2,\cdots,n)$番目の位置ベクトル$\underline{B}_i$（既知）を，A^Tは行列Aの転置行列を表すとして，三次元直交座標を使用し，次式で表す.

$$\underline{B}_i=(x_i,y_i,z_i)^T \tag{1}$$

ここで，目標が受信機を搭載している場合，$\underline{B}_i$は送信源の位置である．目標が送信源の場合，$\underline{B}_i$は受信機の位置である．つぎに，目標の位置を次式で表す.

$$\underline{L}=(x,y,z)^T \tag{2}$$

すると，i番目の送受信機間の距離の真値R_iは次式となる.

$$R_i=f_i(x,y,z) \tag{3}$$

ここで，次式を定義する.

$$f_i(x,y,z)=\sqrt{(x_i-x)^2+(y_i-y)^2+(z_i-z)^2} \tag{4}$$

すると，i番目の送受信機間の距離の観測値R_{io}は次式となる.

$$R_{io}=R_i+S+v_i \tag{5}$$

ここで，Sは時計誤差による距離のバイアス誤差，v_iはランダムな観測誤差である．すると，全微分の公式を使用して，次の性質を得る[1],[6]～[8].

（性質１）目標の位置推定のための初期値をx_0,y_0,z_0とすると，次式を得る.

$$\Delta R_{io}=\begin{pmatrix}\alpha_i & \beta_i & \gamma_i & 1\end{pmatrix}\underline{a}+v_i \tag{6}$$

ここで，次式を定義する.

$$\Delta R_{io}=R_{io}-f_i(x_0,y_0,z_0) \tag{7}$$

$$\underline{a}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0,S)^T \tag{8}$$

$$\alpha_i=-\frac{x_i-x_0}{f_i(x_0,y_0,z_0)},\beta_i=-\frac{y_i-y_0}{f_i(x_0,y_0,z_0)},\gamma_i=-\frac{z_i-z_0}{f_i(x_0,y_0,z_0)} \tag{9}$$

2.2. 線形モデル

距離観測値を n 個得るとすれば，式(6)より，次式の線形観測モデルを得る.

$$\underline{b}=A\underline{a}+\underline{v} \tag{10}$$

ここで，

$$\underline{b}=(\Delta R_{1o},\Delta R_{2o},\cdots,\Delta R_{no})^T \tag{11}$$

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_n & \beta_n & \gamma_n & 1\end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\underline{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^T \tag{13}$$

である．なお，観測雑音は無相関として，次式を仮定する．ここで，$E[\ ]$は平均，$diag\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$は対角成分を$a_1,a_2,\cdots,a_n$とする対角行列，$A>0$は行列$A$が正値対称行列を表す.

$$E[\underline{v}]=\underline{0} \tag{14}$$

$$V=E[\underline{v}\underline{v}^T]=diag\{\ \sigma_1^2,\ \sigma_2^2,\ \cdots\ ,\sigma_n^2\ \}>0 \tag{15}$$

なお，

$$\underline{\omega}(i)=(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)^T\quad(i=1,2,\cdots n) \tag{16}$$

$$A_0=(\underline{\omega}(1),\underline{\omega}(2),\cdots\underline{\omega}(n))^T \tag{17}$$

とし，$\underline{\varepsilon}_n$は各要素を1とする次式のn次元ベクトル

$$\underline{\varepsilon}_n=(1,1,\cdots,1)^T \tag{18}$$

とすれば，式(12)は，次式となる.

$$A=\begin{pmatrix}A_0 & \underline{\varepsilon}_n\end{pmatrix} \tag{19}$$

2.3. 最小自乗解

次の性質は，重み付き線形最小自乗法[9],[10]により,目標の位置が算出できることを示す[1],[4]～[8].

（性質２）次式を最小とする$\hat{\underline{a}}$を推定する.

$$J=(\underline{b}-A\hat{\underline{a}})^T V^{-1}(\underline{b}-A\hat{\underline{a}}) \tag{20}$$

解は，$A^TV^{-1}A$が正則ならば，次式である.

$$\hat{\underline{a}}=(A^TV^{-1}A)^{-1}A^TV^{-1}\underline{b} \tag{21}$$

次の性質は，式(21)で算出した目標位置及び距離バイアス誤差が不偏推定量であることを示すとともに，その推定誤差共分散行列を示す [1],[4]～[6],[8].

（性質３）式(21)は，次の性質を有する.

$$E[\hat{\underline{a}}]=\underline{a} \tag{22}$$

$$E\left[(\hat{\underline{a}}-\underline{a})(\hat{\underline{a}}-\underline{a})^T\right]=\left(A^TV^{-1}A\right)^{-1} \qquad (23)$$

ここで，本論文で使用する前提条件を次に示す．

（前提条件１） k は，$1,2,\cdots,n$ のいずれかとする．このとき，$\underline{\omega}(j)-\underline{\omega}(k)$ $(j=1,\cdots,n, j\neq k)$ のうち，いずれか３個が１次独立とする．なお，$4\leq n$ とする．

次の性質は，式(21)の算出可能条件を示す[7]．

（性質４） 前提条件１が成立するとする．このとき，$A^TV^{-1}A$ は正則である．

3. TDOA 測位

3.1. 距離差の観測モデル

式(6)及び(8)より，次式を得る．

$$\Delta R_{io}-\Delta R_{1o}=\begin{pmatrix}\alpha_i-\alpha_1 & \beta_i-\beta_1 & \gamma_i-\gamma_1\end{pmatrix}\underline{a}_D+(v_i-v_1) \qquad (24)$$

ここで，

$$\underline{a}_D=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)^T \qquad (25)$$

である．なお，式(8)及び(25)より，次式を得る．

$$\underline{a}_D=N\underline{a} \qquad (26)$$

ここで，次式を定義する

$$N=\begin{pmatrix}I_3 & 0\underline{\varepsilon}_3\end{pmatrix} \qquad (27)$$

3.2. 線形モデル

距離観測値を n 個得るとすれば，式(24)，(25)及び(16)より，次式の線形観測モデルを得る．

$$\underline{b}_D=A_D\underline{a}_D+\underline{v}_D \qquad (28)$$

ここで，

$$\underline{b}_D=(\Delta R_{2o}-\Delta R_{1o},\cdots,\Delta R_{no}-\Delta R_{1o})^T \qquad (29)$$

$$A_D=(\underline{\omega}(2)-\underline{\omega}(1),\cdots,\underline{\omega}(n)-\underline{\omega}(1))^T \qquad (30)$$

$$\underline{v}_D=\begin{pmatrix}v_2-v_1, & \cdots & v_n-v_1\end{pmatrix}^T \qquad (31)$$

である．なお，

$$M=\begin{pmatrix}-1\cdot\underline{\varepsilon}_{n-1} & I_{n-1}\end{pmatrix} \qquad (32)$$

とすれば，式(29)及び(11)，式(30)及び(17)，式(31)及び(13)より，次式を得る．

$$\underline{b}_D=M\underline{b} \qquad (33)$$

$$A_D=MA_0 \qquad (34)$$

$$\underline{v}_D=M\underline{v} \qquad (35)$$

式(31)に，式(14)及び(15)を使用して，次式を得る．

$$E[\underline{v}_D]=\underline{0} \qquad (36)$$

$$V_D=E\left[\underline{v}_D\underline{v}_D^T\right]=\begin{pmatrix}\sigma_2^2+\sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2\\ \sigma_1^2 & \sigma_3^2+\sigma_1^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_1^2\\ \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 & \sigma_n^2+\sigma_1^2\end{pmatrix} \qquad (37)$$

次の性質は，V_D が正値で，正則であることを示す．

（性質５） $\sigma_i^2>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$ とすれば，次式を得る．なお，$3\leq n$ とする．

$$V_D>0 \qquad (38)$$

（証明） $\sigma_i^2>0$ $(i=2,3,\cdots,n)$ のうちの最小値を $\sigma^2>0$ とすれば，式(37)より，次式を得る．なお，$A\geq 0$ は，行列 A が半正値対称行列を示す．

$$V_D\geq V_D^{\min} \qquad (39)$$

ここで，次式を定義する．

$$V_D^{\min}=\begin{pmatrix}\sigma^2+\sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2\\ \sigma_1^2 & \sigma^2+\sigma_1^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \sigma_1^2\\ \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 & \sigma^2+\sigma_1^2\end{pmatrix} \qquad (40)$$

すると，行列 $V_D^{\min}$ の行列式 $\left|V_D^{\min}\right|$ は次式となる．

$$\left|V_D^{\min}\right|=\left\{\sigma^2+(n-1)\sigma_1^2\right\}(n-2)\sigma^2>0 \qquad (41)$$

式(41)は，式(40)を使用して，まず第２列目～第 n-1 列目を第１列目に加算した後，第２行目～第 n-1 行目から第１行目を減算し，最後に三角行列の行列式の性質を使用して得られる．

$V_D^{\min}$ は誤差共分散行列と見なせるため半正値であるが，式(41)より正則でもあるので，正値である．この結果と，式(39)より，結論を得る．（証明終）

3.3. 最小自乗解

次の性質は，性質２に対応する．

（性質６） 次式を最小とする $\hat{\underline{a}}_D$ を推定する．

$$J_D=(\underline{b}_D-A_D\hat{\underline{a}}_D)^TV_D^{-1}(\underline{b}_D-A_D\hat{\underline{a}}_D) \qquad (42)$$

解は，$A_D^TV_D^{-1}A_D$ が正則ならば，次式である．

$$\hat{\underline{a}}_D=\left(A_D^TV_D^{-1}A_D\right)^{-1}A_D^TV_D^{-1}\underline{b}_D \qquad (43)$$

次の性質は，性質３に対応する．

（性質７） 式(43)は，次の性質を有する．

$$E[\hat{\underline{a}}_D]=\underline{a}_D \qquad (44)$$

$$P_D=E\left[(\hat{\underline{a}}_D-\underline{a}_D)(\hat{\underline{a}}_D-\underline{a}_D)^T\right]=\left(A_D^TV_D^{-1}A_D\right)^{-1} \qquad (45)$$

次の性質は，式(43)の算出可能条件を示す．

（性質８） 前提条件１が成立するとする．このとき，$A_D^TV_D^{-1}A_D$ は正則である．

3.4. TOA との関係

ここでは，TDOA と TOA との関係について述べる．まず，式(19)及び(27)より，次式を得る．

$$A_0=AN^T \qquad (46)$$

次に，式(34)及び(46)より，次式を得る．

$$A_D=MAN^T \qquad (47)$$

更に，式(37)に，式(35)及び(15)を使用して，次式を得る．

$$V_D = MVM^T \tag{48}$$

4. 性能比較

4.1. TOA での測位誤差(位置)

TOA での目標位置の測位精度は，式(8)及び(27)より，次式の $\hat{\underline{a}}_L$ の性質を調べればよい．

$$\hat{\underline{a}}_L = N\hat{\underline{a}} \tag{49}$$

次の性質は，性質３に対応する．

（性質９） 前提条件１が成立するとする．このとき，式(49)は，次の性質を有する．

$$E\left[\hat{\underline{a}}_L\right] = N\underline{a} \tag{50}$$

$$P_L = E\left[\left(\hat{\underline{a}}_L - N\underline{a}\right)\left(\hat{\underline{a}}_L - N\underline{a}\right)^T\right] = N\left(A^T V^{-1} A\right)^{-1} N^T \tag{51}$$

（証明） 式(49)及び(22)より，式(50)を得る．式(49)及び(23)より，式(51)を得る．（証明終）

次の性質は，TOA と TDOA との比較に使用する．

（性質１０）前提条件１が成立するとする．このとき，次式を得る．なお，$\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n$ は正の実数である．

$$P_L^{-1} = A_0^T V^{-1} A_0 - \frac{1}{\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n} A_0^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} A_0 \tag{52}$$

（証明） 式(19)より，次式を得る．

$$A^T V^{-1} A = \begin{pmatrix} A_0^T V^{-1} A_0 & A_0^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \\ \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} A_0 & \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \end{pmatrix} \tag{53}$$

なお，性質４より $A^T V^{-1} A$ は正値であるので，式(53)より $A_0^T V^{-1} A_0$ は正値，$\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n$ は正の実数である．ここで，

$$F = \left(A_0^T V^{-1} A_0\right)^{-1} A_0^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \tag{54}$$

$$d = \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n - \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} A_0 \left(A_0^T V^{-1} A_0\right)^{-1} A_0^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \tag{55}$$

とすれば，式(53)より，次式を得る．

$$\left[A^T V^{-1} A\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \left(A_0^T V^{-1} A_0\right)^{-1} + 1/d \cdot FF^T & -1/d \cdot F \\ -1/d \cdot F^T & 1/d \end{pmatrix} \tag{56}$$

式(51)に，式(27)及び(56)を使用して，次式を得る．

$$P_L = \left(A_0^T V^{-1} A_0\right)^{-1} + 1/d \cdot FF^T \tag{57}$$

文献[11]の式(7B.5)を使用して，次式を得る．

$$\left[\left(A_0^T V^{-1} A_0\right)^{-1} + 1/d \cdot FF^T\right]^{-1} = A_0^T V^{-1} A_0 \tag{58}$$

$$-\left(A_0^T V^{-1} A_0\right) F \left[F^T \left(A_0^T V^{-1} A_0\right) F + d\right]^{-1} F^T \left(A_0^T V^{-1} A_0\right)$$

式(54)及び(55)より，次式を得る．

$$F^T \left(A_0^T V^{-1} A_0\right) F + d = \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \tag{59}$$

式(57)～(59)より，次式を得る．

$$P_L^{-1} = A_0^T V^{-1} A_0 - \frac{1}{\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n} \left(A_0^T V^{-1} A_0\right) FF^T \left(A_0^T V^{-1} A_0\right) \tag{60}$$

式(54)より，次式を得る．

$$\left(A_0^T V^{-1} A_0\right) FF^T \left(A_0^T V^{-1} A_0\right) = A_0^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} A_0 \tag{61}$$

式(60)及び(61)より，式(52)を得る．（証明終）

4.2. TDOA での測位誤差

次の性質は， TOA と TDOA の関連を示す．

（性質１１）前提条件１が成立するとする．このとき，次式を得る．

$$V^{-1} - M^T \left[MVM^T\right]^{-1} M = \frac{1}{\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \underline{\varepsilon}_n} V^{-1} \underline{\varepsilon}_n \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \tag{62}$$

（証明） まず，式(15)より，次式を定義する．

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \cdot \underline{\varepsilon}_{n-1}^T \\ 0 \cdot \underline{\varepsilon}_{n-1} & V_1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

ここで，

$$V_1 = diag\left\{\ \sigma_2^2,\ \sigma_3^2,\ \cdots\ ,\sigma_n^2\ \right\} > 0 \tag{64}$$

である．式(32)及び(64)より，次式を得る．

$$MVM^T = \sigma_1^2 \cdot \underline{\varepsilon}_{n-1} \underline{\varepsilon}_{n-1}^T + V_1 \tag{65}$$

文献[11]の式(7B.5)を使用して，次式を得る

$$\left[\sigma_1^2 \cdot \underline{\varepsilon}_{n-1} \underline{\varepsilon}_{n-1}^T + V_1\right]^{-1} = V_1^{-1} - V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} \left[\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} + 1/\sigma_1^2\right]^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \tag{66}$$

式(18)及び(64)より，次式を得る．

$$s_1 = \underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} = \sum_{i=2}^{n} \left(1/\sigma_i^2\right) \tag{67}$$

$$s = \underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} + 1/\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(1/\sigma_i^2\right) \tag{68}$$

$$V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} = \left(\ 1/\sigma_2^2,\ \cdots,\ 1/\sigma_n^2\ \right)^T \tag{69}$$

$$V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} \underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_2^4} & \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_3^2} & \cdots & \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_n^2} \\ \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_3^2} & \frac{1}{\sigma_3^4} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2 \sigma_n^2} \\ \frac{1}{\sigma_2^2 \sigma_n^2} & \cdots & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2 \sigma_n^2} & \frac{1}{\sigma_n^4} \end{pmatrix} \tag{70}$$

$$V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} \underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} = s_1 \left(\ \frac{1}{\sigma_2^2},\ \cdots,\ \frac{1}{\sigma_n^2}\ \right)^T \tag{71}$$

$$\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} \underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} = \left(s_1\right)^2 \tag{72}$$

式(65)，(66)及び(68)より，次式を得る．

$$\left[MVM^T\right]^{-1} = V_1^{-1} - 1/s \cdot V_1^{-1} \underline{\varepsilon}_{n-1} \underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1} \tag{73}$$

式(32)及び(73)より，次式を得る．

$$M^T\left[MVM^T\right]^{-1}M=\begin{pmatrix}\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1} & -\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\\ -V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1} & V_1^{-1}\end{pmatrix} \tag{74}$$

$$-\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1} & -\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\\ -V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1} & V_1^{-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}\underline{\varepsilon}_{n-1}^T V_1^{-1}\end{pmatrix}$$

ここで，

$$s_i=\sum_{j=1,\neq i}^{n}\left(1/\sigma_j^2\right)\quad (i=2,3,\cdots,n) \tag{75}$$

とすれば，式(68)より，次式を得る．

$$\frac{1}{\sigma_i^2}-\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\sigma_i^4}=\frac{s_i}{s}\cdot\frac{1}{\sigma_i^2}\quad (i=2,3,\cdots,n) \tag{76}$$

式(74)に，式(67)～(72)，(76)及び(64)を使用して，次式を得る．

$$M^T\left[MVM^T\right]^{-1}M=\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{s_1}{\sigma_1^2} & -\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \cdots & -\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_n^2}\\ -\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{s_2}{\sigma_2^2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2}\\ -\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_n^2} & \cdots & -\frac{1}{\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2} & \frac{s_n}{\sigma_n^2}\end{pmatrix} \tag{77}$$

式(67)，(68)及び(76)より，次式を得る．

$$1-\frac{s_i}{s}=\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\sigma_i^2} \tag{78}$$

式(15)，(77)及び(78)より，次式を得る．

$$V^{-1}-M^T\left[MVM^T\right]^{-1}M=\frac{1}{s}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^4} & \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \cdots & \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_n^2}\\ \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{1}{\sigma_2^4} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2}\\ \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_n^2} & \cdots & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2} & \frac{1}{\sigma_n^4}\end{pmatrix} \tag{79}$$

式(70)と同様に，次式を得る．

$$V^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^4} & \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \cdots & \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_n^2}\\ \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} & \frac{1}{\sigma_2^4} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2}\\ \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_n^2} & \cdots & \frac{1}{\sigma_{n-1}^2\sigma_n^2} & \frac{1}{\sigma_n^4}\end{pmatrix} \tag{80}$$

式(79)及び(80)より，次式を得る．

$$V^{-1}-M^T\left[MVM^T\right]^{-1}M=\frac{1}{s}V^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \tag{81}$$

式(18)及び(15)より，式(68)を使用し，次式を得る．

$$s=\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}\underline{\varepsilon}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2} \tag{82}$$

式(81)及び(82)より，式(62)を得る．(証明終)

次の性質は，TDOA と TOA との測位誤差共分散行列の比較に使用する．

(性質１２)前提条件１が成立するとする．このとき，次式を得る．

$$P_D^{-1}=A_0^T V^{-1}A_0-\frac{1}{\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}\underline{\varepsilon}_n}A_0^T V^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}A_0 \tag{83}$$

(証明) まず，式(62)より，次式を定義する．

$$A_0^T V^{-1}A_0-A_0^T M^T\left[MVM^T\right]^{-1}MA_0=\frac{A_0^T V^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}A_0}{\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}\underline{\varepsilon}_n} \tag{84}$$

式(45)に，式(34)及び(48)を使用して，次式を得る．

$$P_D^{-1}=A_0^T M^T\left[MVM^T\right]^{-1}MA_0 \tag{85}$$

式(85)及び式(84)より，式(83)を得る．(証明終)

次の性質は，TDOA 及び TOA で算出した測位誤差共分散行列が同一であることを示す．

(性質１３)前提条件１が成立するとする．このとき，次式を得る．

$$P_D=P_L \tag{86}$$

(証明) 式(52)及び(83)より，結論を得る．(証明終)

5. 考察

5.1. 解の同一性

性質１３は，TOA と TDOA とで，測位誤差の統計的性質が同一であることを示す．更に，次の性質は， 両者の測位結果が同一であることを示す．

(性質１４)前提条件１が成立するとする．このとき，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_L=\underline{\hat{a}}_D \tag{87}$$

(証明) まず，式(43)に，式(45)，(86)，(34)，(48)及び(33)を代入して，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_D=P_L A_0^T M^T\left[MVM^T\right]^{-1}M\underline{b} \tag{88}$$

式(88)に，式(51)を代入して，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_D=N\left(A^T V^{-1}A\right)^{-1}N^T A_0^T M^T\left[MVM^T\right]^{-1}M\underline{b} \tag{89}$$

つぎに，式(49)に，式(21)を代入して，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_L=N\left(A^T V^{-1}A\right)^{-1}A^T V^{-1}\underline{b} \tag{90}$$

式(19)より，次式を得る．

$$A^T V^{-1}=\begin{pmatrix}A_0^T V^{-1}\\ \underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}\end{pmatrix} \tag{91}$$

また，式(27)及び(56)より，次式を得る．

$$N\left(A^T V^{-1}A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\left(A_0^T V^{-1}A_0\right)^{-1}+\frac{1}{d}FF^T & -\frac{1}{d}F\end{pmatrix} \tag{92}$$

式(91)及び(92)より，次式を得る．

$$N\left(A^T V^{-1}A\right)^{-1}A^T V^{-1}=\left(A_0^T V^{-1}A_0\right)^{-1}A_0^T V^{-1}+\frac{1}{d}FF^T A_0^T V^{-1}-\frac{1}{d}F\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1} \tag{93}$$

式(90)に，式(93)を代入して，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_L=\left[\left(A_0^T V^{-1}A_0\right)^{-1}A_0^T V^{-1}+\frac{1}{d}FF^T A_0^T V^{-1}-\frac{1}{d}F\underline{\varepsilon}_n^T V^{-1}\right]\underline{b} \tag{94}$$

一方，式(62)より，次式を得る．

$$M^T\left[MVM^T\right]^{-1}M=V^{-1}-\frac{1}{\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n}V^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1} \tag{95}$$

ここで，式(17)及び(27)より，次式を得る．

$$N^TA_0^T=\begin{pmatrix} A_0^T \\ 0\underline{\varepsilon}_n^T \end{pmatrix} \tag{96}$$

式(95)及び(96)より，次式を得る．

$$N^TA_0^TM^T\left[MVM^T\right]^{-1}M=\begin{pmatrix} A_0^TV^{-1}-\frac{1}{\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n}A_0^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1} \\ 0\underline{\varepsilon}_n^T \end{pmatrix} \tag{97}$$

式(92)及び(97)より，次式を得る．

$$N\left(A^TV^{-1}A\right)^{-1}N^TA_0^TM^T\left[MVM^T\right]^{-1}M=\left(A_0^TV^{-1}A_0\right)^{-1}A_0^TV^{-1}+\frac{1}{d}FF^TA_0^TV^{-1} \tag{98}$$
$$-\left[\left(A_0^TV^{-1}A_0\right)^{-1}+\frac{1}{d}FF^T\right]\frac{A_0^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}}{\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n}$$

ここで，式(54)及び(55)より，次式を得る．

$$F^TA_0^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n=\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n-d \tag{99}$$

式(54)及び(99)より，次式を得る．

$$\left[\left(A_0^TV^{-1}A_0\right)^{-1}+\frac{1}{d}FF^T\right]\frac{A_0^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}}{\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}\underline{\varepsilon}_n}=\frac{1}{d}F\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1} \tag{100}$$

式(89)に，式(98)及び(100)を使用し，次式を得る．

$$\underline{\hat{a}}_D=\left[\left(A_0^TV^{-1}A_0\right)^{-1}A_0^TV^{-1}+\frac{1}{d}FF^TA_0^TV^{-1}-\frac{1}{d}F\underline{\varepsilon}_n^TV^{-1}\right]\underline{b} \tag{101}$$

式(94)及び(101)より，式(87)を得る．（証明終）

5.2. 数値計算結果

本節では，TOA と TDOA の同一性の理解をより容易にするための数値計算結果を示す．なお，簡明な数値計算にするため，初期値には真値を使用し，収束計算は行っていない．

このため，目標の位置が $\underline{L}=(-30km,-30km,4km)^T$，受信機の位置が $\underline{B}_1=(60km,60km,60m)^T$， $\underline{B}_2=(60km,-60km,60m)^T$， $\underline{B}_3=(-60km,-60km,60m)^T$，$\underline{B}_4=(-60km,60km,60m)^T$，距離観測雑音の分散が $\sigma_1^2=81m^2,\sigma_2^2=36m^2,\sigma_3^2=9m^2,\sigma_4^2=36m^2$，距離のバイス誤差が $S=30m,0m$， 初期値 $\left(x_0,y_0,z_0\right)^T$ が $\underline{L}$ の場合の測位位置の平均，分散及び測位誤差共分散行列の対角成分（分散に相当）のシミュレーション結果を表１に示す(平均の単位は m, 分散の単位はｍ^2)．なお，TDOA における基準局には，4 個のうち観測精度が最悪の受信機 B_1 を使用した．また，試行回数は，1000 である．

表 1　測位結果の比較

測位結果		バイアス誤差有り		バイアス誤差無し	
		TOA	TDOA	TOA	TDOA
平均	x	-29999	-29999	-29999	-29999
	y	-29999	-29999	-29999	-29999
	z	3943.6	3942.5	3943.6	3942.5
分散	x	886.90	886.90	886.90	886.90
	y	874.07	874.06	874.07	874.06
	z	1514859	1514854	1514859	1514854
誤差共分散	x	844.13	844.13	844.13	844.13
	y	844.13	844.13	844.13	844.13
	z	1447452	1447452	1447452	1447452

6. むすび

本稿では, TDOA と時計誤差を未知数とする TOA による三次元の位置推定結果は, 同一であること示した．この結果，距離差のみの観測でも測位可能な TDOA により，TOA と同一性能で，より簡便なシステム構築が可能なことが分かった．なお，距離差の観測雑音共分散行列は対角行列ではないため，TDOA での誤差解析が困難である．しかし，TDOA の測位誤差共分散行列が，TOA の測位誤差共分散行列と一致することを使用すれば, 対角行列である TOA の観測雑音共分散を使用して，TDOA での誤差解析が容易にできる．

文　献

[1] 佐田達典, ＧＰＳ測量技術，オーム社 ,東京. 2003.

[2] 西谷芳雄，電波計器，成山堂書店 ,東京. 2002.

[3] 安田明生，“GPS の現状と展望”，信学誌，vol.82 no.12,　pp.1207-1215, Dec. 1999.

[4] Y.Bar-Shalom, X.R.Li and T.Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation,　John Wiley & Sons, New York, 2001.

[5] M.S,Grewal,　L.R.Weill,　A.P.Andrews,　Global Positioning　Systems,　Inertial　Navigation,　and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[6] 福島荘之介, 理解するための GPS 測位計算プログラム入門（その３）測位計算のはなし,航空無線，no.36，夏期，　2003.

[7] 小菅義夫,“特異値によるＴＯＡ測位精度の解析,”, 信学論(B)，vol. J97-B, no3, pp.-333-340, March. 2014.

[8] 坂井　丈泰, GPS 技術入門, 東京電機大学出版局，東京，2003.

[9] A.Gelb,ed., Applied Optimal Estimation, The M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[10] 中川　徹，小柳義夫，最小二乗法による実験データ解析，東京大学出版界，東京, 1982.

[11] A.H.Jazwinski,“Stochastic　Processes　and　Filtering Theory,”Academic Press, San Diego, 1970.

[12] 宮崎裕己他，“広域マルチラテレーションの評価試験”，第 11 回電子航法研究所発表会講演概要 ，東京. June 2011.