論　文

位置及び速度を観測値とする九次元カルマンフィルタの過渡応答

小菅　義夫†

Transient Response of a 9-Dimensional Kalman Filter Using Position and Velocity Measurements

Yoshio KOSUGE†

あらまし　航空機等の移動物体の位置，速度及び加速度の真値を推定する追尾フィルタの初期状態での過渡応答について述べる．本論文では，位置及び速度を観測値として，運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタで追尾法を構築し，過渡応答の性能向上を図る．まず，位置及び速度は最新の観測値，加速度は速度観測値をサンプリング間隔で除算して，初期値を算出する（K-LVS と呼ぶ）．このK-LVS は，位置のみを観測値として運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタ（K-L と呼ぶ）より性能が悪い場合があることを示す．つぎに，2 サンプリング分の観測値を使用して，重み付き最小自乗法で初期値を算出する（K-LV と呼ぶ）．K-LV は，サンプリング間隔並びに速度観測性能によらず，K-L より，過渡応答の性能がよいことを示す．

キーワード　追尾フィルタ，カルマンフィルタ，過渡応答，レーダ，GPS

1. まえがき

航空機等の目標からの観測値をもとに，目標の位置，速度及び加速度の真値を推定する九次元運動モデルを使用した追尾フィルタ [1]～[6] の初期状態での過渡応答について述べる．この代表例は，等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタ [7], [8] である．

目標の位置，速度の真値を推定する六次元運動モデルを使用した追尾フィルタでは，位置のほかに，速度を観測値として使用すれば，初期状態での過渡応答の性能が改善することを報告した [9]．このため，より早く位置，速度及び加速度を真値に収束させるには，位置のほかに，速度を観測値として使用すればよいのではとの期待がある．

ところで，六次元運動モデルの追尾フィルタでは，位置，速度の初サンプリングの観測値を，推定値の初期値とすればよい．しかし，加速度の初期値は，初サンプリングの位置，速度のみでは算出できない．このため，九次元モデルを使用した追尾フィルタにおいて，初期状態での過渡応答の性能を改善するにはどうしたらよいか，初期値を含め検討する必要がある．

本論文では，位置及び速度を観測値として，運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタで追尾法を構築する．なお，初期値は，位置及び速度は最新の観測値，加速度は 2 サンプリング分の速度観測値をサンプリング間隔で除算して算出する方法（K-LVS と呼ぶ）と，重み付き最小自乗法による方法（K-LV と呼ぶ）を考察する．また，両者を，位置のみを観測値として運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタ（K-L と呼ぶ）と比較する．

2. 運動モデルと観測モデル

2.1　北基準直交座標

東を x 軸の正，北を y 軸の正，水平面（x-y 面）に垂直で上方を z 軸の正に取った直交座標を「北基準直交座標」と呼ぶ．

2.2　運動モデル

サンプリング時刻 t_k（以後，時刻 t_k と呼ぶ）における北基準直交座標での等加速度運動モデルを次式で定義する．なお，A^T は行列 A の転置行列，I_n は $n \times n$ の単位行列を表す記号とする．

† 独立行政法人　電子航法研究所，調布市
Electronic Navigation Research Institute, 7–4–23 Jindaiji-higashi-machi, Chofu-shi, 182–0012 Japan

$$\underline{x}_k = \Phi_{k-1}\underline{x}_{k-1} \quad (1)$$

ここで，

・$\underline{x}_k$ は時刻 t_k における三次元空間の目標位置 $\underline{L}_k$，速度 $\underline{V}_k$，加速度 $\underline{A}_k$ の真値を表す北基準直交座標での九次元の状態ベクトルで，

$$\underline{x}_k = \begin{pmatrix} \underline{L}_k \\ \underline{V}_k \\ \underline{A}_k \end{pmatrix} \quad (2)$$

・Φ_{k-1} は，時刻 t_{k-1} より t_k への状態ベクトルの推移を表す正則行列で，

$$\Phi_{k-1} = \begin{pmatrix} I_3 & (t_k - t_{k-1})I_3 & (t_k - t_{k-1})^2/2 \cdot I_3 \\ 0I_3 & I_3 & (t_k - t_{k-1})I_3 \\ 0I_3 & 0I_3 & I_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

である．

2.3 観測モデル

2.3.1 位置及び速度の観測

時刻 t_k において三次元空間の目標位置と速度を観測する六次元のモデルを次式で定義する．

$$\underline{z}_k = H\underline{x}_k + \underline{v}_k \quad (4)$$

ここで，$\underline{0}$ は零ベクトルを表すとすれば，

・$\underline{z}_k$ は，時刻 t_k における北基準直交座標での目標位置観測ベクトルを $\underline{z}_{k,l}$，速度観測ベクトルを $\underline{z}_{k,v}$ としたとき，

$$\underline{z}_k = \begin{pmatrix} \underline{z}_{k,l} \\ \underline{z}_{k,v} \end{pmatrix} \quad (5)$$

・H は観測行列で，

$$H = \begin{pmatrix} I_3 & 0I_3 & 0I_3 \\ 0I_3 & I_3 & 0I_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

・$\underline{v}_k$ は平均 $\underline{0}$ で誤差共分散行列 B_k の六変量白色正規分布に従う観測雑音ベクトルで，時刻 t_k における北基準直交座標での目標位置観測雑音ベクトルを $\underline{v}_{k,l}$，速度観測雑音ベクトルを $\underline{v}_{k,v}$ としたとき，$E[\ ]$ は平均を表す記号とし，観測雑音雑音ベクトルの各要素は座標軸間で相関があるとし，

$$\underline{v}_k = \begin{pmatrix} \underline{v}_{k,l} \\ \underline{v}_{k,v} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$B_k = E\left[\underline{v}_k\underline{v}_k^T\right] = \begin{pmatrix} B_{k,l} & B_{k,lv} \\ B_{k,lv}^T & B_{k,v} \end{pmatrix} \quad (8)$$

である．なお，$A > 0$ は行列 A が正値対称行列（行列 A の固有値が全て正と等価）を示すとし，次式を仮定する．

$$B_k > 0 \quad (9)$$

なお，式 (8) 及び (9) より，観測雑音共分散行列 B_k に対して，次式が成立する [9]．

$$B_{k,l} > 0 \quad (10)$$

$$B_{k,v} > 0 \quad (11)$$

$$B_{k,v} - B_{k,lv}^T B_{k,l}^{-1} B_{k,lv} > 0 \quad (12)$$

ここで，行列の要素が行列であるブロック行列（block matrix）[10] を使用して，

$$B_k^{-1} = \begin{pmatrix} A_{k,l} & A_{k,lv} \\ A_{k,lv}^T & A_{k,v} \end{pmatrix} \quad (13)$$

とすれば，次式が成立する [9]．なお，$A \geq 0$ は行列 A が半正値対称行列（行列 A の固有値が全て非負と等価）を示す．

$$A_{k,v} = \left[B_{k,v} - B_{k,lv}^T B_{k,l}^{-1} B_{k,lv}\right]^{-1} > 0 \quad (14)$$

$$A_{k,l} = B_{k,l}^{-1} + B_{k,l}^{-1} B_{k,lv} A_{k,v} B_{k,lv}^T B_{k,l}^{-1} \quad (15)$$

$$A_{k,lv} = -B_{k,l}^{-1} B_{k,lv} A_{k,v} \quad (16)$$

$$A_{k,l} = \left[B_{k,l} - B_{k,lv} B_{k,v}^{-1} B_{k,lv}^T\right]^{-1} > 0 \quad (17)$$

$$A_{k,v} = B_{k,v}^{-1} + B_{k,v}^{-1} B_{k,lv}^T A_{k,l} B_{k,lv} B_{k,v}^{-1} > 0 \quad (18)$$

$$A_{k,lv} = -A_{k,l} B_{k,lv} B_{k,v}^{-1} \quad (19)$$

$$B_k^{-1} \geq \begin{pmatrix} B_{k,l}^{-1} & 0I_3 \\ 0I_3 & 0I_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

2.3.2 位置のみの観測

三次元空間の目標位置のみを観測する三次元のモデルを次式で定義する．

$$\underline{z}_{k,l} = H_l\underline{x}_k + \underline{v}_{k,l} \quad (21)$$

ここで，H_l は次式の観測行列である．

$$H_l = (I_3 \quad 0I_3 \quad 0I_3) \quad (22)$$

3. 位置と速度を観測値とする追尾

3.1 カルマンフィルタ

位置と速度を観測値とする等加速度運動モデルを使

用したカルマンフィルタは，以下の式 (23)〜(27) で表される [8], [9]．なお，A^{-1} は，行列 A の逆行列を表す．

$$\underline{\hat{x}}_k(-) = \Phi_{k-1}\underline{\hat{x}}_{k-1}(+) \tag{23}$$

$$P_k(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1}(+)\Phi_{k-1}^T \tag{24}$$

$$K_k = P_k(-)H^T\Big[HP_k(-)H^T + B_k\Big]^{-1} \tag{25}$$

$$\underline{\hat{x}}_k(+) = \underline{\hat{x}}_k(-) + K_k(\underline{z}_k - H\underline{\hat{x}}_k(-)) \tag{26}$$

$$P_k(+) = P_k(-) - K_kHP_k(-) \tag{27}$$

ここで，

・$\underline{\hat{x}}_k(-)$ は時刻 t_{k-1} までの観測ベクトル（$\underline{z}_k$ は使用しない）に基づく九次元の状態ベクトル $\underline{x}_k$ の推定値，

・$P_k(-)$ は，推定誤差 $\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(-)$ の共分散行列で，

$$P_k(-) = E\Big[(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(-))(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(-))^T\Big] \tag{28}$$

・K_k は，時刻 t_k のゲイン行列，

・$\underline{\hat{x}}_k(+)$ は時刻 t_k までの観測ベクトル（$\underline{z}_k$ を使用する）に基づく九次元の状態ベクトル $\underline{x}_k$ の推定値，

・$P_k(+)$ は，推定誤差 $\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(+)$ の共分散行列で，

$$P_k(+) = E\Big[(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(+))(\underline{x}_k - \underline{\hat{x}}_k(+))^T\Big] \tag{29}$$

である．なお，次式が成立する [8], [9]．

$$P_k(+) = \Big[P_k(-)^{-1} + H^TB_k^{-1}H\Big]^{-1} \tag{30}$$

3.2 初　期　値

3.2.1 簡易な方法

次式の簡易な初期値を使用した追尾法を K-LVS と呼ぶことにする．なお，K-LVS の時刻 t_k における平滑ベクトル，予測誤差共分散行列及び平滑誤差共分散行列をそれぞれ $\underline{\hat{x}}_{k,s}(+)$，$P_{k,s}(-)$，$P_{k,s}(+)$ と書く．

$$\underline{\hat{x}}_{1,s}(+) = \begin{pmatrix} \underline{z}_{1,l} \\ \underline{z}_{1,v} \\ (\underline{z}_{1,v} - \underline{z}_{0,v})/(t_1 - t_0) \end{pmatrix} \tag{31}$$

すると，式 (29) に，式 (4)，(5)，(8) 及び (31) を使用し次式を得る．

$$P_{1,s}(+) = \begin{pmatrix} B_{1,l} & B_{1,lv} & B_{1,lv}/(t_1 - t_0) \\ B_{1,lv}^T & B_{1,v} & B_{1,v}/(t_1 - t_0) \\ B_{1,lv}^T/(t_1 - t_0) & B_{1,v}/(t_1 - t_0) & [B_{1,v} + B_{0,v}]/(t_1 - t_0)^2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

なお，運動モデル及び観測モデルの定義より，次式が成立する．

$$E[\underline{\hat{x}}_{1,s}(+)] = \underline{x}_1 \tag{33}$$

次の性質は，式 (32) の逆行列が算出可能であることを示す．

（性質 1）式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$P_{1,s}(+) > 0 \tag{34}$$

$$P_{1,s}(+)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,l} & A_{1,lv} & 0I_3 \\ A_{1,lv}^T & A_{1,v} + B_{0,v}^{-1} & -(t_1 - t_0)B_{0,v}^{-1} \\ 0I_3 & -(t_1 - t_0)B_{0,v}^{-1} & (t_1 - t_0)^2B_{0,v}^{-1} \end{pmatrix} \tag{35}$$

（証明）式 (14)〜(16) より，式 (32) と (35) を乗算すると，単位行列となるので，式 (35) を得る．

一方，$P_{1,s}(+)$ は推定誤差共分散行列であるので，$P_{1,s}(+) \geq 0$ である．また，$P_{1,s}(+)$ は正則行列である．この結果，式 (34) を得る．(証明終)

なお，式 (35) の導出には，極めて煩雑なブロック行列の計算が必要である．

3.2.2 重み付き最小自乗法

式 (1) より，次式を得る．

$$\underline{x}_1 = \Phi_0\underline{x}_0 \tag{36}$$

重み付き最小自乗法で，次式を最小にする $\underline{\hat{x}}_0$ を算出する．

$$J = (\underline{z}_0 - H\underline{\hat{x}}_0)^TB_0^{-1}(\underline{z}_0 - H\underline{\hat{x}}_0) + (\underline{z}_1 - H\Phi_0\underline{\hat{x}}_0)^TB_1^{-1}(\underline{z}_1 - H\Phi_0\underline{\hat{x}}_0) \tag{37}$$

ここで，次式を得る [7]．

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{\hat{x}}_0} = -2H^TB_0^{-1}\underline{z}_0 + 2H^TB_0^{-1}H\underline{\hat{x}}_0 - 2\Phi_0^TH^TB_1^{-1}\underline{z}_1 + 2\Phi_0^TH^TB_1^{-1}H\Phi_0\underline{\hat{x}}_0 \tag{38}$$

式 (38) を $\underline{0}$ とし次式を得る．

$$L_1\underline{\hat{x}}_0 = H^TB_0^{-1}\underline{z}_0 + \Phi_0^TH^TB_1^{-1}\underline{z}_1 \tag{39}$$

ここで，次式を定義する．

$$L_1 = H^TB_0^{-1}H + \Phi_0^TH^TB_1^{-1}H\Phi_0 \tag{40}$$

次の性質は，観測雑音共分散行列が時刻の関数で，サ

ンプリング間隔は不定とした本論文の場合でも，L_1 が正則行列となり，$\hat{\underline{x}}_0$ が算出可能（式 (39) 参照）であることを示す．

（性質 2）式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$L_1 > 0 \tag{41}$$

（証明）式 (9) 及び (40) より，$L_1 \geq 0$ であるので，L_1 は 0 となる固有値をもたないことを示せばよい．

ここで，L_1 が固有値として 0 をもてば，次式が成立する九次元の固有ベクトル $\underline{x}$ が存在する．

$$L_1\underline{x} = \underline{0} \tag{42}$$

$$\underline{x} \neq \underline{0} \tag{43}$$

すると，式 (42) 及び (40) より，次式を得る．

$$(B_0^{-1}H\underline{x}, H\underline{x}) + (B_1^{-1}H\Phi_0\underline{x}, H\Phi_0\underline{x}) = 0 \tag{44}$$

B_0^{-1} 及び B_1^{-1} は正値対称行列であるので，式 (44) より，次式を得る．

$$H\underline{x} = 0 \tag{45}$$

$$H\Phi_0\underline{x} = 0 \tag{46}$$

三次元ベクトル $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ を使用し $\underline{x}$=$(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)^T$ と表せば，式 (45) 及び (6) より，次式を得る．

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_2 = \underline{0} \tag{47}$$

更に，式 (46)，(3)，(6) 及び (47) より，次式を得る．

$$(t_1 - t_0)\underline{x}_3 = \underline{0} \tag{48}$$

式 (48) より，次式を得る．

$$\underline{x}_3 = \underline{0} \tag{49}$$

式 (43) と，式 (47)，(49) は矛盾しており，L_1 の固有値は 0 とはならない．(証明終)

次の性質は，カルマンフィルタを使用して追尾フィルタを構成する場合の重み付き最小自乗法による初期値を示す．

（性質 3）式 (9) が成立するとき，重み付き最小自乗法による初期値は次式を満たす．

$$\hat{\underline{x}}_1(+) = \Phi_0 L_1^{-1}\left[H^T B_0^{-1}\underline{z}_0 + \Phi_0^T H^T B_1^{-1}\underline{z}_1\right] \tag{50}$$

$$E[\hat{\underline{x}}_1(+)] = \underline{x}_1 \tag{51}$$

$$P_1(+) = \Phi_0 L_1^{-1}\Phi_0^T \tag{52}$$

（証明）式 (39) 及び (41) より，次式を得る．

$$\hat{\underline{x}}_0 = L_1^{-1}\left[H^T B_0^{-1}\underline{z}_0 + \Phi_0^T H^T B_1^{-1}\underline{z}_1\right] \tag{53}$$

すると，式 (36) より，次式で初期値を決めればよい．

$$\hat{\underline{x}}_1(+) = \Phi_0\hat{\underline{x}}_0 \tag{54}$$

式 (53) 及び (54) より，式 (50) を得る．

つぎに，式 (50) 及び (4) より，観測雑音ベクトルの平均は零ベクトルの仮定を使用し次式を得る．

$$E[\hat{\underline{x}}_0] = L_1^{-1}\left[H^T B_0^{-1}H\underline{x}_0 + \Phi_0^T H^T B_1^{-1}H\underline{x}_1\right] \tag{55}$$

式 (55)，(36) 及び (40) より，次式を得る．

$$E[\hat{\underline{x}}_0] = \underline{x}_0 \tag{56}$$

式 (54)，(56) 及び (36) より，式 (51) を得る．

式 (54) 及び (36) より，次式を得る．

$$\underline{x}_1 - \hat{\underline{x}}_1(+) = \Phi_0\underline{x}_0 - \Phi_0\hat{\underline{x}}_0 \tag{57}$$

式 (29) 及び (57) より，次式を得る．

$$P_1(+) = \Phi_0 E\left[(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0)^T\right]\Phi_0^T \tag{58}$$

式 (4)，(53)，(36) 及び (40) より，次式を得る．

$$\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0 = -L_1^{-1}\left[H^T B_0^{-1}\underline{v}_0 + \Phi_0^T H^T B_1^{-1}\underline{v}_1\right] \tag{59}$$

式 (59) より，式 (40) 及び観測モデルの定義を使用し次式を得る．

$$E\left[(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0)(\underline{x}_0 - \hat{\underline{x}}_0)^T\right] = L_1^{-1} \tag{60}$$

式 (58) 及び (60) より，式 (52) を得る．(証明終)

（性質 4）式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$P_1(+)^{-1} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12}^T & G_{22} & G_{23} \\ G_{13}^T & G_{23}^T & G_{33} \end{pmatrix} \tag{61}$$

ここで，次式を定義する．

$$G_{11} = A_{0,l} + A_{1,l} \tag{62}$$

$$G_{12} = A_{0,lv} + A_{1,lv} - (t_1 - t_0)A_{0,l} \tag{63}$$

$$G_{13} = (t_1 - t_0)^2/2 \cdot A_{0,l} - (t_1 - t_0)A_{0,lv} \tag{64}$$

$$G_{22} = (t_1-t_0)^2 A_{0,l} - (t_1-t_0)\left[A_{0,lv}^T + A_{0,lv}\right] + A_{0,v} + A_{1,v} \tag{65}$$

$$G_{23} = -\frac{(t_1-t_0)^3}{2}A_{0,l} + \frac{(t_1-t_0)^2}{2}\left[2A_{0,lv}+A_{0,lv}^T\right] - (t_1-t_0)A_{0,v} \tag{66}$$

$$G_{33} = \frac{(t_1-t_0)^4}{4}A_{0,l} - \frac{(t_1-t_0)^3}{2}\left[A_{0,lv}+A_{0,lv}^T\right] + (t_1-t_0)^2 A_{0,v} \tag{67}$$

（証明）式 (3) より，次式を得る．

$$\Phi_k^{-1} = \begin{pmatrix} I_3 & -(t_{k+1}-t_k)I_3 & (t_{k+1}-t_k)^2/2\cdot I_3 \\ 0I_3 & I_3 & -(t_{k+1}-t_k)I_3 \\ 0I_3 & 0I_3 & I_3 \end{pmatrix} \tag{68}$$

式 (52) 及び (40) より，次式を得る．

$$P_1(+)^{-1} = \left[\Phi_0^T\right]^{-1}\left[H^T B_0^{-1} H + \Phi_0^T H^T B_1^{-1} H \Phi_0\right]\Phi_0^{-1} \tag{69}$$

式 (69) に，式 (68)，(6) 及び (13)～(16) を使用し式 (61)～(67) を得る．(証明終)

4. 位置を観測値とする追尾

4.1 カルマンフィルタ

位置のみを観測値とする等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタ（これを K-L と呼ぶ）は，以下の式 (70)～(74) で表される [7], [8]．なお，K-L の時刻 t_k における予測ベクトル，平滑ベクトル，予測誤差共分散行列及び平滑誤差共分散行列，ゲイン行列をそれぞれ $\underline{\hat{x}}_{k,l}(-)$，$\underline{\hat{x}}_{k,l}(+)$，$P_{k,l}(-)$，$P_{k,l}(+)$，$K_{k,l}$ と書く．

$$\underline{\hat{x}}_{k,l}(-) = \Phi_{k-1}\underline{\hat{x}}_{k-1,l}(+) \tag{70}$$

$$P_{k,l}(-) = \Phi_{k-1}P_{k-1,l}(+)\Phi_{k-1}^T \tag{71}$$

$$K_{k,l} = P_{k,l}(-)H_l^T\left[H_l P_{k,l}(-)H_l^T + B_{k,l}\right]^{-1} \tag{72}$$

$$\underline{\hat{x}}_{k,l}(+) = \underline{\hat{x}}_{k,l}(-) + K_{k,l}(\underline{z}_{k,l} - H_l\underline{\hat{x}}_{k,l}(-)) \tag{73}$$

$$P_{k,l}(+) = P_{k,l}(-) - K_{k,l}H_l P_{k,l}(-) \tag{74}$$

なお，次式が成立する [8], [9]．

$$P_{k,l}(+) = \left[P_{k,l}(-)^{-1} + H_l^T B_{k,l}^{-1} H_l\right]^{-1} \tag{75}$$

4.2 初　期　値

位置のみを観測値とする場合，次式による初期値を使用した追尾法が構築できる [11]．

$$\underline{\hat{x}}_{2,l}(+) = \begin{pmatrix} \underline{z}_{2,l} \\ \left(\frac{1}{t_2-t_1}+\frac{1}{t_2-t_0}\right)\underline{z}_{2,l} - \frac{t_2-t_0}{(t_2-t_1)(t_1-t_0)}\underline{z}_{1,l} + \frac{t_2-t_1}{(t_2-t_0)(t_1-t_0)}\underline{z}_{0,l} \\ \frac{2}{(t_2-t_1)(t_2-t_0)}\underline{z}_{2,l} - \frac{2}{(t_2-t_1)(t_1-t_0)}\underline{z}_{1,l} + \frac{2}{(t_2-t_0)(t_1-t_0)}\underline{z}_{0,l} \end{pmatrix} \tag{76}$$

すると，次の性質を得る [11]．

（性質 5）式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$E[\underline{\hat{x}}_{2,l}(+)] = \underline{x}_2 \tag{77}$$

$$P_{2,l}(+) = \begin{pmatrix} P_2^{11} & P_2^{12} & P_2^{13} \\ P_2^{12} & P_2^{22} & P_2^{23} \\ P_2^{13} & P_2^{23} & P_2^{33} \end{pmatrix} > 0 \tag{78}$$

ここで，次式を定義する．

$$P_2^{11} = B_{2,l} \tag{79}$$

$$P_2^{12} = \left(\frac{1}{t_2-t_1}+\frac{1}{t_2-t_0}\right)B_{2,l} \tag{80}$$

$$P_2^{13} = 2/(t_2-t_1)(t_2-t_0)\cdot B_{2,l} \tag{81}$$

$$P_2^{22} = \left(\frac{1}{t_2-t_1}+\frac{1}{t_2-t_0}\right)^2 B_{2,l} + \frac{(t_2-t_0)^2}{(t_2-t_1)^2(t_1-t_0)^2}B_{1,l} + \frac{(t_2-t_1)^2}{(t_2-t_0)^2(t_1-t_0)^2}B_{0,l} \tag{82}$$

$$P_2^{23} = \left(\frac{1}{t_2-t_1}+\frac{1}{t_2-t_0}\right)\frac{2}{(t_2-t_1)(t_2-t_0)}B_{2,l} + \frac{2(t_2-t_0)}{(t_2-t_1)^2(t_1-t_0)^2}B_{1,l} + \frac{2(t_2-t_1)}{(t_2-t_0)^2(t_1-t_0)^2}B_{0,l} \tag{83}$$

$$P_2^{33} = \frac{4}{(t_2-t_1)^2(t_2-t_0)^2}B_{2,l} + \frac{4}{(t_2-t_1)^2(t_1-t_0)^2}B_{1,l} + \frac{4}{(t_2-t_0)^2(t_1-t_0)^2}B_{0,l} \tag{84}$$

4.3 初期推定誤差共分散行列

ここでは，追尾フィルタの性能評価に必要となる平滑誤差共分散行列初期値の逆行列を具体的に算出する．

(性質 6) 式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$P_{2,l}(+)^{-1} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{pmatrix} \tag{85}$$

ここで，次式を定義する．

$$G_{11}=B_{0,l}^{-1}+B_{1,l}^{-1}+B_{2,l}^{-1} \quad (86)$$

$$G_{12}=-(t_2-t_0)B_{0,l}^{-1}-(t_2-t_1)B_{1,l}^{-1} \quad (87)$$

$$G_{13}=(t_2-t_0)^2/2\cdot B_{0,l}^{-1}+(t_2-t_1)^2/2\cdot B_{1,l}^{-1} \quad (88)$$

$$G_{22}=(t_2-t_0)^2B_{0,l}^{-1}+(t_2-t_1)^2B_{1,l}^{-1} \quad (89)$$

$$G_{23}=-(t_2-t_0)^3/2\cdot B_{0,l}^{-1}-(t_2-t_1)^3/2\cdot B_{1,l}^{-1} \quad (90)$$

$$G_{33}=(t_2-t_0)^4/4\cdot B_{0,l}^{-1}+(t_2-t_1)^4/4\cdot B_{1,l}^{-1} \quad (91)$$

（証明）式 (79)〜(84) 及び (86)〜(91) より，式 (78) と (85) を乗算すると，単位行列となる．(証明終)

なお，式 (85) の導出には，極めて煩雑なブロック行列の計算が必要である．

5. 性能比較

初期状態での過渡応答の性能を比較する．

5.1 K-LVS と K-L

次の前提条件 1 が成立する場合を考察する．

（前提条件 1）一次元空間で，サンプリング間隔 T，位置の観測雑音の分散 b_l 及び速度の観測雑音の分散 b_v がそれぞれ一定で，位置の観測雑音と速度の観測雑音は無相関とする．

このため，式 (3)，(6) 及び (8) を，それぞれ次式の定数行列とする．

$$\Phi_{k-1}=\Phi=\begin{pmatrix}1 & T & T^2/2\\ 0 & 1 & T\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (92)$$

$$H=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad (93)$$

$$B_k=B=\begin{pmatrix}b_l & 0\\ 0 & b_v\end{pmatrix}>0 \quad (94)$$

この場合，次式を得る [11]．

$$\hat{\underline{x}}_{2,l}(+)=\begin{pmatrix}\underline{z}_{2,l}\\ (3\underline{z}_{2,l}-4\underline{z}_{1,l}+\underline{z}_{0,l})/2T\\ (\underline{z}_{2,l}-2\underline{z}_{1,l}+\underline{z}_{0,l})/T^2\end{pmatrix} \quad (95)$$

$$P_{2,l}(+)=\begin{pmatrix}b_l & 3b_l/2T & b_l/T^2\\ 3b_l/2T & 13b_l/2T^2 & 6b_l/T^3\\ b_l/T^2 & 6b_l/T^3 & 6b_l/T^4\end{pmatrix} \quad (96)$$

次の性質は，K-LVS と K-L の性能比較に使用する．

（性質 7）前提条件 1 が成立するとき，次式を得る．

$$P_{2,s}(+)=\frac{1}{T^2(48b_l+11T^2b_v)}\times$$
$$\begin{pmatrix}T^2(24b_l+11T^2b_v)b_l & 14T^3b_lb_v & 6T^2b_lb_v\\ 14T^3b_lb_v & T^2(T^2b_v+40b_l)b_v & 2T(T^2b_v+12b_l)b_v\\ 6T^2b_lb_v & 2T(T^2b_v+12b_l)b_v & 4(T^2b_v+6b_l)b_v\end{pmatrix} \quad (97)$$

（証明）式 (32) 及び仮定より，次式を得る．

$$P_{1,s}(+)=\begin{pmatrix}b_l & 0 & 0\\ 0 & b_v & b_v/T\\ 0 & b_v/T & 2b_v/T^2\end{pmatrix} \quad (98)$$

式 (30)，(24) 及び仮定より，次式を得る．

$$P_{2,s}(+)^{-1}=\left[\Phi^T\right]^{-1}P_{1,s}(+)^{-1}\Phi^{-1}+H^TB^{-1}H \quad (99)$$

式 (99) に，式 (92)〜(94) 及び (98) を使用し次式を得る．

$$P_{2,s}(+)^{-1}=\begin{pmatrix}2/b_l & -T/b_l & T^2/2b_l\\ -T/b_l & \frac{T^2}{b_l}+\frac{3}{b_v} & -\frac{T^3}{2b_l}-\frac{3T}{b_v}\\ T^2/2b_l & -\frac{T^3}{2b_l}-\frac{3T}{b_v} & \frac{T^4}{4b_l}+\frac{5T^2}{b_v}\end{pmatrix} \quad (100)$$

式 (100) より，式 (97) を得る．(証明終)

次の性質は，K-LVS は，K-L より速度及び加速度の推定精度がよいとは限らないことを示す．

（性質 8）前提条件 1 が成立するとする．また，時刻 t_2 における K-LVS 及び K-L の速度，加速度の平滑誤差の分散をそれぞれ $p_{2,s}^{22}(+)$，$p_{2,s}^{33}(+)$ 及び $p_{2,l}^{22}(+)$，$p_{2,l}^{33}(+)$ とすると，次式を得る．

$$\begin{cases}p_{2,s}^{22}(+)-p_{2,l}^{22}(+)>0 & (when\ T^2b_v\geq 40b_l)\\ p_{2,s}^{22}(+)-p_{2,l}^{22}(+)<0 & (when\ T^2b_v\leq 30b_l)\end{cases} \quad (101)$$

$$\begin{cases}p_{2,s}^{33}(+)-p_{2,l}^{33}(+)>0 & (when\ T^2b_v\geq 20b_l)\\ p_{2,s}^{33}(+)-p_{2,l}^{33}(+)<0 & (when\ T^2b_v\leq 10b_l)\end{cases} \quad (102)$$

（証明）式 (96) 及び (97) より，次式を得る．

$$p_{2,s}^{22}(+)-p_{2,l}^{22}(+)=\frac{2T^4b_v^2-63T^2b_lb_v-624b_l^2}{2T^2(48b_l+11T^2b_v)} \quad (103)$$

$$p_{2,s}^{33}(+) - p_{2,l}^{33}(+) = \frac{2(2T^4b_v^2 - 21T^2b_lb_v - 144b_l^2)}{T^4(48b_l + 11T^2b_v)} \tag{104}$$

ここで，次式を得る．

$$\begin{aligned} &2T^4b_v^2 - 63T^2b_lb_v - 624b_l^2 \\ &\geq 2T^2b_v \cdot 40b_l - 63T^2b_lb_v - 624b_l^2 \\ &= 17T^2b_lb_v - 624b_l^2 \geq 17b_l \cdot 40b_l - 624b_l^2 \\ &= 56b_l^2 > 0 \quad (when\ T^2b_v \geq 40b_l) \end{aligned} \tag{105}$$

$$\begin{aligned} &2T^4b_v^2 - 63T^2b_lb_v - 624b_l^2 \\ &\leq 2T^2b_v \cdot 30b_l - 63T^2b_lb_v - 624b_l^2 = \\ &-3T^2b_lb_v - 624b_l^2 < 0 \quad (when\ T^2b_v \leq 30b_l) \end{aligned} \tag{106}$$

式 (103) に，式 (105) 及び (106) を使用し式 (101) を得る．

一方，次式を得る．

$$\begin{aligned} &2T^4b_v^2 - 21b_lb_v - 144b_l^2 \geq 2T^2b_v \cdot 20b_l - 21b_lb_v \\ &-144b_l^2 = 19T^2b_lb_v - 144b_l^2 \geq 19b_l \cdot 20b_l - 144b_l^2 \\ &= 236b_l^2 > 0 \quad (when\ T^2b_v \geq 20b_l) \end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned} &2T^4b_v^2 - 21b_lb_v - 144b_l^2 \\ &\leq 2T^2b_v \cdot 10b_l - 21T^2b_lb_v - 144b_l^2 \\ &= -T^2b_lb_v - 144b_l^2 < 0 \quad (when\ T^2b_v \leq 10b_l) \end{aligned} \tag{108}$$

式 (104) に，式 (107) 及び (108) を使用し式 (102) を得る．（証明終）

5.2 K-LV と K-L

次の性質は，$k = 2$ のとき，K-LV の過渡応答の性能は，K-L よりよいことを示す（一般に，$0 < A \leq B$ ならば $0 < B^{-1} \leq A^{-1}$）．

(性質 9) 式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$P_2(+)^{-1} \geq P_{2,l}(+)^{-1} > 0 \tag{109}$$

（証明）式 (30) 及び (24) より，次式を得る．

$$P_2(+)^{-1} = \left[\Phi_1^T\right]^{-1} P_1(+)^{-1}\Phi_1^{-1} + H^TB_2^{-1}H \tag{110}$$

式 (110) に，式 (69) を代入し，次式を得る．

$$\begin{aligned} P_2(+)^{-1} &= \left[\Phi_1^T\right]^{-1}\left[\Phi_0^T\right]^{-1} H^TB_0^{-1}H\Phi_0^{-1}\Phi_1^{-1} \\ &+ \left[\Phi_1^T\right]^{-1} H^TB_1^{-1}H\Phi_1^{-1} + H^TB_2^{-1}H \end{aligned} \tag{111}$$

式 (20) より，式 (6) 及び (22) を使用し次式を得る．

$$H^TB_k^{-1}H \geq H_l^TB_{k,l}^{-1}H_l \tag{112}$$

式 (68) 及び (22) より，式 (85)～(91) を使用し次式を得る．

$$\begin{aligned} P_{2,l}(+)^{-1} &= \left[\Phi_1^T\right]^{-1}\left[\Phi_0^T\right]^{-1} H_l^TB_{0,l}^{-1}H_l\Phi_0^{-1}\Phi_1^{-1} \\ &+ \left[\Phi_1^T\right]^{-1} H_l^TB_{1,l}^{-1}H_l\Phi_1^{-1} + H_l^TB_{2,l}^{-1}H_l \end{aligned} \tag{113}$$

式 (111) 及び (113) より，式 (112) 及び (78)（$P_{2,l}(+) > 0$）を使用し式 (109) を得る．（証明終）

次の性質は，K-LV の過渡応答の性能は，K-L よりよいことを示す．

（性質 10）式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$P_{k,l}(+) \geq P_k(+) > 0 \quad (k \geq 2) \tag{114}$$

$$P_{k+1,l}(-) \geq P_{k+1}(-) > 0 \quad (k \geq 2) \tag{115}$$

（証明）式 (114) に関する数学的帰納法により証明する．式 (109) より，$k = 2$ のとき，式 (114) が成立する．

つぎに，$k = n$ のとき，式 (114) が成立するとする．式 (24) 及び (71) より，式 (114) に関する帰納法の仮定を使用し次式を得る．

$$\begin{aligned} &P_{n+1,l}(-) - P_{n+1}(-) \\ &= \Phi_n[P_{n,l}(+) - P_n(+)]\Phi_n^T \geq 0 \end{aligned} \tag{116}$$

$$P_{n+1}(-) = \Phi_nP_n(+)\Phi_n^T > 0 \tag{117}$$

式 (116) 及び (117) より，$k = n$ のとき，式 (115) が成立する．

式 (30) に，式 (115)，(112) 及び (9) を使用し，次式を得る．

$$P_{n+1}(+)^{-1} \geq P_{n+1,l}(-)^{-1} + H_l^TB_{n+1,l}^{-1}H_l > 0 \tag{118}$$

式 (118) 及び (75) より，次式を得る．

$$P_{n+1}(+)^{-1} \geq P_{n+1,l}(+)^{-1} > 0 \tag{119}$$

式 (119) は，式 (114) が，$k = n + 1$ のとき，成立することを示す．（証明終）

5.3 数値計算結果

次の表 1～表 3 は，K-LV と K-L の平滑性能を比較した結果を示す．ここで，比較は，等加速度運動目標に対する目標位置，目標速度及び目標加速度の平滑

表 1　目標位置平滑誤差の分散（m^2）
Table 1　Variances of estimated position errors (m^2).

追尾フィルタ	速度観測精度 (m^2/s^2)	サンプリング時刻（s）				
		1	2	3	4	5
K-LV	0.01	0.501	0.337	0.256	0.209	0.178
	100	0.981	0.975	0.935	0.876	0.815
K-L	-	-	1.000	0.950	0.886	0.821

表 2　目標速度平滑誤差の分散（m^2/s^2）
Table 2　Variances of estimated velocity errors (m^2/s^2).

追尾フィルタ	速度観測精度 (m^2/s^2)	サンプリング時刻（s）				
		1	2	3	4	5
K-LV	0.01	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005
	100	51.923	5.850	2.341	1.211	0.714
K-L	-	-	6.500	2.450	1.243	0.727

表 3　目標加速度平滑誤差の分散（m^2/s^4）
Table 3　Variances of estimated acceleration errors (m^2/s^4).

追尾フィルタ	速度観測精度 (m^2/s^2)	サンプリング時刻（s）				
		1	2	3	4	5
K-LV	0.01	0.02	0.005	0.002	0.0010	0.00057
	100	200	5.357	0.952	0.278	0.105
K-L	-	-	6.000	1.000	0.286	0.107

誤差の分散で行った．なお，比較を容易にするため，一次元空間の追尾で，サンプリング間隔 T 及び位置の観測雑音の分散 b_l は 1，速度の観測雑音の分散 b_v は 0.01（速度観測精度が良）及び 100（速度観測精度が悪），位置の観測雑音と速度の観測雑音は無相関とした．

なお，性質 8 において，$b_v = 0.01$ は K-LVS の方が，$b_v = 100$ は K-L の方が性能のよい場合である．

表 1～表 3 は，どの場合も，K-LV が K-L より性能が良いことを示す．特に，速度の観測精度が良い場合，速度及び加速度の平滑精度は大幅に改善される．しかし，速度観測精度が悪い場合，性能差は小さい．

6. 考　　察

6.1 K-LVS と K-L

式 (31) の初期値は，式 (33) 及び (34) より，カルマンフィルタの初期値の条件を満たしている．ところで，位置の時間差分により算出した速度は，サンプリング間隔 T が大きく，位置の観測雑音の分散 b_l が小さいほど高精度である．しかし，式 (31) が示すように，K-LVS では，速度の初期値に位置の情報は全く使用していない．このため，式 (101) が示すように，T が大きく，b_l が小さい場合，K-LVS の性能が K-L より悪い場合が生じたと考えられる．この結果，速度を観測値とした場合に，K-L より常に性能を良くするためには，初期値算出に工夫が必要なことが分かる．

6.2 K-LV と K-LVS

性質 10 は，K-LV が K-L より性能が良いことを示す．この要因は，K-LV は，初期値を K-LVS より改善したためと考えられる．実際，次の性質が成立する．

（性質 11）式 (9) が成立するとき，次式を得る．

$$P_{1,s}(+) \geq P_1(+) > 0 \tag{120}$$

（証明）式 (35) 及び (61) より，$t = t_1 - t_0$ とすれば，式 (62)～(67) を使用し次式を得る．

$$P_1(+)^{-1} - P_{1,s}(+)^{-1} = \begin{pmatrix} A_{0,l} & A_{0,lv} - tA_{0,l} & t^2/2 \cdot A_{0,l} - tA_{0,lv} \\ (A_{0,lv} - tA_{0,l})^T & R_{22} & R_{23} \\ (t^2/2 \cdot A_{0,l} - tA_{0,lv})^T & R_{23}^T & R_{33} \end{pmatrix} \tag{121}$$

ここで，次式を定義する．

$$R_{22} = t^2 A_{0,l} - t\left[A_{0,lv}^T + A_{0,lv}\right] + A_{0,v} - B_{0,v}^{-1} \tag{122}$$

$$R_{23} = -t^3/2 \cdot A_{0,l} + t^2/2 \cdot \left[2A_{0,lv} + A_{0,lv}^T\right] - t\left[A_{0,v} - B_{0,v}^{-1}\right] \tag{123}$$

$$R_{33} = t^4/4 \cdot A_{0,l} - t^3/2 \cdot \left[A_{0,lv} + A_{0,lv}^T\right] + t^2\left[A_{0,v} - B_{0,v}^{-1}\right] \tag{124}$$

ところで，

$$A = A_{0,l} \tag{125}$$

$$C = B_{0,lv} B_{0,v}^{-1} \tag{126}$$

とすれば，式 (18) 及び (19) を使用し，式 (121)～(124) より，次式を得る．

$$P_1(+)^{-1} - P_{1,s}(+)^{-1} = \begin{pmatrix} A & -A[C + tI_3] & A[t^2/2 \cdot I_3 + tC] \\ -[C + tI_3]^T A^T & R_{22} & R_{23} \\ [t^2/2 \cdot I_3 + tC]^T A^T & R_{23}^T & R_{33} \end{pmatrix} \tag{127}$$

表 4　追尾フィルタの比較
Table 4　Comparison of tracking filters.

追尾フィルタ	K-LV	K-L	K-LVS
観測値	位置，速度	位置	位置，速度
推定値	位置，速度，加速度	同左	同左
初期値	式(50),(52)	式(76),(78)	式(31),(32)
追尾性能	K−L より良	K-LV より悪	K-L より悪い場合あり

ここで，次式を定義する．

$$R_{22} = t^2 A + t\left[C^T A^T + AC\right] + C^T AC \qquad (128)$$

$$R_{23} = -t^3/2 \cdot A - t^2/2 \cdot \left[2AC + C^T A\right] - tC^T AC \qquad (129)$$

$$R_{33} = t^4/4 \cdot A + t^3/2 \cdot \left[AC + C^T A\right] + t^2 C^T AC \qquad (130)$$

三次元ベクトル $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ を使用し $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3)^T$ と表せば，式 (127)〜(130) より，次式を得る．

$$\left(\left[P_1(+)^{-1} - P_{1,s}(+)^{-1}\right]\underline{x}, \underline{x}\right) = (A\underline{y}, \underline{y}) \qquad (131)$$

ここで，次式を定義する．

$$\underline{y} = \underline{x}_1 - (tI_3 + C)\underline{x}_2 + (t^2/2 \cdot I_3 + tC)\underline{x}_3 \qquad (132)$$

式 (131)，(17)，(125) 及び (34) より，次式を得る．

$$P_1(+)^{-1} \geq P_{1,s}(+)^{-1} > 0 \qquad (133)$$

式 (133) より，式 (120) を得る．(証明終)

6.3 ま と め

表 4 は，駆動雑音を 0 とした等加速度運動モデルを使用した K-LV，K-L 及び K-LVS を比較した結果を示す．

7. む す び

本論文では，位置及び速度を観測値とし，位置及び速度からなる観測雑音共分散行列は正値として，運動モデルに曖昧さがないとした等加速度運動モデルを使用したカルマンフィルタで追尾法を構築し，その初期状態での平滑性能を解析した．K-LVS は速度観測値を使用しているが，サンプリング間隔の自乗と速度観測雑音の分散の積が位置の観測雑音の分散に比して大きい場合，K-L より性能が悪い場合があることを示した．一方，サンプリング間隔並びに速度観測性能によらず，K-LV は，K-L より性能がよいことが分かった．

文　献

[1] C.B. Chang and J.A. Tabaczynski, “Application of state estimation to target tracking,” IEEE Trans. Autom. Control, vol.29, no.2, pp.98–108, Feb. 1984.

[2] S.S. Blackman, Multiple Target Tracking with Radar Applications, Artech House, Dedham, 1986.

[3] Y. Bar-Shalom and T.E. Fortman, Tracking and Data Association, Academic Press, New York, 1988.

[4] 小菅義夫，“レーダによる単一目標追尾法の現状と将来，” 信学論（B），vol.J93-B, no.11, pp.1504–1511, Nov. 2010.

[5] S.S. Blackman and R. Popoli, Design and Analysis of Modern Tracking Systems, Artech House, Boston, 1999.

[6] Y. Bar-Shalom, X.R. Li, and T. Kirubarajan, Estimation with Applications to Tracking and Navigation, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[7] A. Gelb, ed., Applied Optimal Estimation, M.I.T. Press, Cambridge, 1974.

[8] A.H. Jazwinski, Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, San Diego, 1970.

[9] 小菅義夫，“位置及び速度を観測値とする六次元カルマンフィルタの過渡応答，” 信学論（B），vol.J96-B, no.11, pp.1294–1303, Nov. 2013.

[10] M.S. Grewal, L.R. Weill, and A.P. Andrews, Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration, John Wiley & Sons, Hoboken, 2007.

[11] 小菅義夫，“位置の n 階微分値を一定とする追尾フィルタの初期値算出方法，” 信学論（B），vol.J96-B, no.8, pp.859–866, Aug. 2013.

（平成 25 年 11 月 8 日受付，26 年 1 月 22 日再受付）

小菅　義夫　（正員）

昭 47 早大・理工・数学卒．昭 49 同大大学院修士課程了．同年三菱電機（株）入社．平 16 長崎大学工学部教授．単一及び複数センサによる多目標追尾に関する研究に従事．現在，電子航法研究所研究員．工博．計測自動制御学会，IEEE シニア各会員．